Lösningsförslag

till Övningstenta på kursen ETE325: Linjär algebra VT2023

1. Med hjälp av rad/kolonnoperationer och utveckling efter rad/kolonn får vi

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x & 1 \\ 2 & x & -3 & 1 \\ 1 & x & 1 & x \\ x & 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x & 1 \\ 5 & x-1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ x & 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x & 1 \\ 5 & x-1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & x+1 & x+1 \\ x & 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = (x{+}1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & x & 1 \\ 5 & x-1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ x & 2x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x{+}1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 5 & x-1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(x{+}1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 \\ 5 & x-1 & -4 \\ x & 2x & 0 \end{vmatrix} = -(x{+}1)(x{-}1) \begin{vmatrix} 5 & x-1 \\ x & 2x \end{vmatrix}$$

$$= -x(x{+}1)(x{-}1) \begin{vmatrix} 5 & x-1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -x(x{+}1)(x{-}1)\big(10{-}(x{-}1)\big) = x(x{+}1)(x{-}1)(x{-}11)$$

Svar: Ekvationen har fyra lösningar: $x \in \{-1, 0, 1, 11\}$

2. Vi tar fram skärningspunkten mellan linjen ℓ och planet π.

$$(1+t) + 2(2-t) + 3(1+2t) = 5 \;\Leftrightarrow\; 5t + 8 = -7 \;\Leftrightarrow\; t = -3$$

Så skärningspunkten är $P = (-2, 5, -5)$.

En riktningsvektor för ℓ är $u = (1, -1, 2)$ och en normalvektor för planet är $n = (1, 2, 3)$. Eftersom ℓ' ska vara vinkelrät mot båda dessa så kan vi ta $v = u \times n = (-7, -1, 3)$ som en riktningsvektor för ℓ'. Den nya linjen kan alltså skrivas som $P + tv$.
Svar: $\ell' : (x, y, z) = (-2, 5, -5) + t(-7, -1, 3)$ där $t \in \mathbb{R}$.

3. (a) Värderummet spänns upp av kolonnerna, så $V(F) = [(1, 1, 2), (2, 1, 1)] = [u_1, u_2]$. För att omvandla dessa till en ON-bas ersätter vi u_2 med

$$u_2' = u_2 - u_{2||u_1} = u_2 - \frac{5}{6}u_1 = \frac{1}{6}(7, 1, -4).$$

Vi normerar slutligen u_1 och u_2' och får:
Svar: $(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{66}}(7, 1, -4))$ är en ON-bas för $V(F)$.

(b) Nollrummet $N(F)$ är lösningsrummet till ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Varur vi får parameterlösningar

$$(-s - r, -t, s, t, r) = s(-1, 0, 1, 0, 0) + t(0, -1, 0, 1, 0) + r(-1, 0, 0, 0, 1)$$

Så $N(F)$ är höljet $[(0, -1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)] = [v_1, v_2, v_3]$. Vi använder Gram-Schmidt för att omvandla dessa till en ON-bas för $N(F)$. Vi ser dock att v_1 redan är vinkelrät mot v_2 och v_3, så allt vi behöver göra är att ersätta v_3 med

$$v_3' = v_3 - v_{3||v_2} = v_3 - \frac{1}{2}v_2 = \frac{1}{2}(-1, 0, -1, 0, 2).$$

Nu är v_1, v_2, v_3' parvis vinkelräta och spänner upp $N(F)$, så vi normerar och får:
Svar: En ON-bas för $N(F)$ är $(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 0, -1, 0, 2))$.

(c) Dimensionssatsen säger: Om $F : U \to V$ är en linjär avbildning så gäller

$$\dim N(F) + \dim V(F) = \dim U.$$

I vårt fall har $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ med $\dim N(F) = 3$ och $\dim V(F) = 2$ och $\dim \mathbb{R}^5 = 5$, så dimensionssatsen säger för oss att $3 + 2 = 5$ vilket stämmer.

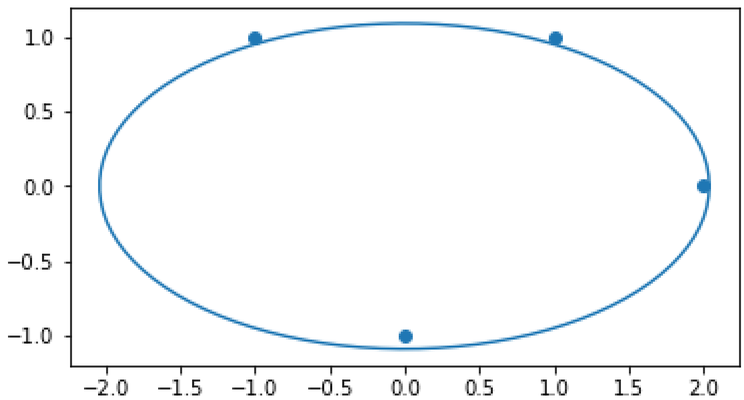
4. Vi stoppar in (x, y)-värdena för de fyra punkterna i ekvationen $ax^2 + by^2 = 1$ och får fyra linjära ekvationer i variablerna a och b. Som matrisekvation kan detta skrivas

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad AX = Y$$

Detta ekvationssystem saknar lösningar, men per definition ges systemets **minstakvadratlösning** av lösningen X till $A^tAX = A^tY$. Vi beräknar matriserna A^tA och A^tY och får 2×2-systemet

$$\begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Så den sökta ellipsen får ekvation $\frac{6}{25}x^2 + \frac{21}{25}y^2 = 1$, sätter vi $y = 0$ respektive $x = 0$ får vi att halvaxlarnas längder är $\frac{5}{\sqrt{6}}$ respektive $\frac{5}{\sqrt{21}}$. Första är strax över 2 och andra är strax över 1. Vi ritar figuren och ser till att alla punkter hamnar på rätt sida ellipsen, exempelvis ligger $(1, 1)$ utanför ellipsen eftersom $\frac{6}{25}1^2 + \frac{21}{25}1^2 > 1$.



Svar: Ellipsens ekvation blir $\frac{6}{25}x^2 + \frac{21}{25}y^2 = 1$, dess halvaxlar är $\frac{5}{\sqrt{6}}$ respektive $\frac{5}{\sqrt{21}}$, och den ser ut som på bilden ovan.

5. Låt S vara avbildningen som speglar i linjen $y = 2x$ och låt R vara avbildningen som roterar en kvarts varv medurs. Då ges den sökta avbildningsmatrisen av produkten $[F] = [R][S]$ (där S står till höger eftersom denna avbildning sker först). För att hitta matrisen $[S]$ tar vi reda på var standardbasvektorerna avbildas. En godtycklig vektor v speglas till $v - 2v_{||n}$ där $n = (2, -1)$ är linjens normalvektor, så

$$S(e_1) = (1, 0) - \frac{4}{5}(2, -1) = \frac{1}{5}(-3, 4) \qquad S(e_2) = (0, 1) - \frac{-2}{5}(2, -1) = \frac{1}{5}(4, 3)$$

$S(e_1)$ och $S(e_2)$ blir kolonnerna i avbildningsmatrisen, så $[S] = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Rotationen är enklare, här gäller ju $R(1, 0) = (0, -1)$ och $R(0, 1) = (1, 0)$ så $[R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Alltså får vi

$$[F] = [R][S] = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

För att ge enklaste geometriska beskrivning noterar vi att $[F]$ är en ON-mastris, så F är en isometri på $\mathbb{R}^2$, och sådana är antingen rotationer eller speglingar. Eftersom $\det([F]) = -1$ är F en spegling. För att hitta linjen i vilken vektorer speglas av F söker vi egenvektorer med egenvärde 1 till F: dessa ligger i spegellinjens riktning. $[F]v = v \Leftrightarrow 5[F]v = 5Iv \Leftrightarrow (5[F] - 5I)v = 0$ ger systemet $\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array}\right]$ vilket har lösingarna $v = t(3,1)$, så detta är den sökta spegellinjen på parameterform. På normalform kan linjen skrivas $x = 3y$.

Svar: Avbildningsmatrisen för F är $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Geometriskt är F en spegling i linjen $x = 3y$.

6. Den kvadratiska formens kan representeras av matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dess karakteristiska polynom (sekularpolynom) är

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1-\lambda & 0 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 4(\lambda+1) + (1-\lambda)\big(\lambda(\lambda+1) - 4\big) = -\lambda^3 + 9\lambda = -\lambda(\lambda-3)(\lambda+3).$$

Matrisens egenvärden är alltså $-3, 0, 3$ och formens signatur är $(1, -1, 0)$. I en anpassad bas kommer alltså ytan att kunna skrivas $3\overline{x}^2 - 3\overline{z}^2 = 12$ i nya koordinater $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, och kurvan beskriver alltså en *hyperbolisk cylinder*. För att ta fram punkterna på ytan närmast origo använder vi satsen som säger att $Q(u) \leq \lambda_{\text{max}}|u|^2$ där likhet råder när u pekar i egenriktningen motsvarande λ_{max}. För $u = (x, y, z)$ som ligger på vår yta gäller alltså $3|u|^2 \geq 12 \;\Leftrightarrow\; |u| \geq 2$ med likhet då u ligger på ytan och i egenrummet tillhörande största egenvärdet 3, alltså är kortaste avstånd från ytan till origo 2. För att ta reda på i vilka punkter detta avstånd antas tar vi fram en normerad egenvektor med egenvärde 3, ekvationssystemet $(A - 3I)v = 0$ blir

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

vilket har lösningar $v = t(2,1,2)$, vi normerar och får en vektor $v = \frac{1}{3}(2,1,2)$ av längd 1 och som pekar i riktningen i vilken minimalt avstånd till origo antas. Vi vet att minimum antas då $|u| = 2$, så minumum antas i punkterna $\pm 2v = \pm(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

Svar: Ytan är en hyperbolisk cylinder, punkterna på ytan närmast origo är $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ och $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$.

7. Eftersom R^4 är identitetsavbildningen på M_3, så gäller att om v är en egenvektor (v är alltså en matris) till R med egenvektor λ gäller $v = R^4 v = \lambda^4 v$, och eftersom $v \neq 0$ gäller $\lambda^4 = 1$. De enda möjliga egenvärdena är alltså 1 och -1 (eftersom vi endast tillåter reella egenvärden i denna kurs). Vi söker först egenvektorer till egenvärdet 1. Om vi väljer matriselementen på posittioner $(1,1), (1,2), (2,2)$ i v

godtyckligt så kan resten av matrisen fyllas i på ett unikt sätt för att $R(v) = v$ ska gälla:

$$v = \begin{bmatrix} a & b & * \\ * & c & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \rightsquigarrow v = \begin{bmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{bmatrix}$$

Så en bas för egenrummet tillhörande egenvärdet 1 är

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Analogt söker vi för egenvärdet -1 matriser v för vilka $R(v) = -v$. Då måste mittelementet vara 0, och om elementen på positioner $(1,1), (1,2)$ väljs godtyckligt så kan resten av matrisen fyllas i på ett unikt sätt för att $R(v) = -v$ ska gälla:

$$v = \begin{bmatrix} a & b & * \\ * & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \rightsquigarrow v = \begin{bmatrix} a & b & -a \\ -b & 0 & -b \\ -a & b & a \end{bmatrix}$$

Så en bas för egenrummet tillhörande egenvärdet -1 är

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Eftersom inga andra egenvärden förekommer finns det alltså endast 5 linjärt oberoende egenvektorer, och därför är inte R diagonaliserbar - eftersom $\dim M_3 = 9$ hade vi då behövt nio linjärt oberoende egenvektorer. Vi sammanfattar

Svar: Alla egenvärden och egenvektorer ges av

Egenvärde	Egenvektorer	
1	$\begin{bmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{bmatrix}$	$(a,b,c) \neq (0,0,0)$
-1	$\begin{bmatrix} a & b & -a \\ -b & 0 & -b \\ -a & b & a \end{bmatrix}$	$(a,b) \neq (0,0)$

Avbildningen är inte diagonaliserbar.

Kommentar 1: Uppgiften kan lösas genom att välja en bas i M_3 och jobba med 9×9-matriser men detta blir ohanterligt.

Kommentar 2: Om man tillåter matriser och egenvärden att vara komplexa blir avbildningen faktiskt diagonaliserbar. T.ex. är $\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en egenvektor med egenvärde i. Linjär algebra över komplexa tal och andra kroppar kan man lära sig mer om i senare kurser.