Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Hemtentamen i Matematik, fortsättningskurs. NMAA07/TEN1
2020-03-26, kl 8-12.

Hjälpmedel är tillåtna (böcker, anteckningar, miniräknare, dator osv) men det är naturligtvis inte tillåtet att på något sätt samarbeta med eller ta hjälp av annan person.
Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng.
För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng.

1. Beräkna följande integraler

   a) $\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$ (1p) b) $\int \ln\sqrt{x}\,dx$ (1p) c) $\int \frac{3x^2+7}{x^3-x^2+4x-4}\,dx$ (1p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = y\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + xe^{\sqrt{1+x^2}}$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 3$.

3. Området mellan x-axeln och kurvan $y = e^{-2x}$, $x \geq 1$, roteras ett varv kring y-axeln. Hur stor volym får den kropp som uppkommer vid rotationen?

4. Beräkna följande gränsvärden

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)-3\ln(1+x)}{5x(1-e^{2x})}$ (1p) b) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\cos(x+2)-1}{(x+3)^{2/3}-1-2(x+2)/3}$ (2p)

5. Undersök om $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}e^{-x^2}$ har lokalt maximum eller minimum i $x = 0$.

6. Beräkna längden av kurvan $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

7. Beräkna volymen av det område som ligger mellan funktionsytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Bifogas Maclaurinutvecklingar

Följande elementära Maclaurinutvecklingar gäller med resttermer i ordoform för x nära 0:

(a) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

(b) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

(c) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$$

(d) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

(e) $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

där $$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \quad \textit{osv.}$$

(f) $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}).$$