Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Matematik, fortsättningskurs. NMAA07/TEN1
2019-03-22, kl 8-12.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng.
För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng.

1. Beräkna följande integraler

   a) $\int \frac{\sin x}{3+\cos x}dx$ (1p) b) $\int \frac{1}{x^2-x-2}dx$ (1p) c) $\int xe^{3x}\,dx$ (1p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy'+2y=3xe^{x^3-1}$, $x\neq 0$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(1)=0$.

3. Beräkna följande gränsvärden

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x(1+x)^{1/3}}{1-\cos x}$ (1p) b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\ln(1+\frac{1}{x})-\sqrt{x^2-4x})$ (2p)

4. Området mellan kurvan $y=\sin\frac{x}{2}$, $0\leq x\leq \pi$, linjen $x=\pi$ och x-axeln roteras ett varv kring y-axeln. Bestäm den rotationsvolym som uppkommer.

5) Bestäm största och minsta värde av funktionen
$f(x,y)=x^2+xy-4x-y^2+3y-2$
då $0\leq x\leq y\leq 4$.

6. Beräkna $\iint_D xy\,dxdy$ där D är det område i första kvadranten som begränsas av $y=x$ och $y=x^3$.

7. Låt $V(t)$ beteckna volymen av den kropp som uppkommer då området mellan x-axeln och kurvan $y=4x+\frac{5}{x^3}$, $t\leq x\leq 2t$ roteras ett varv kring linjen $x=t$ $(t>0)$. För vilket värde på t blir $V(t)$ minimal?

Bifogas Maclaurinutvecklingar

Följande elementära Maclaurinutvecklingar gäller med resttermer i ordoform för x nära 0:

(a) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\mathcal{O}(x^{n+1})$

(b) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\mathcal{O}(x^{2n+1})$

(c) $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathcal{O}(x^{2n+2})$

(d) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\mathcal{O}(x^{n+1})$

(e) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+$
$+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\mathcal{O}(x^{n+1})$

där $\binom{\alpha}{2}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$, $\binom{\alpha}{3}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$ *o s v.*

(f) $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\mathcal{O}(x^{2n+1})$.

Lösningsförslag NMAA 07. 2019-03-22

1. a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3+\cos x}\,dx \;\Big/\; \begin{matrix} t = 3+\cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{matrix} \;\Big/ = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t|+C$

$= -\ln(3+\cos x) + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x-2} = \int \frac{dx}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$

c) $\displaystyle\int x e^{3x}\,dx \;/\; PI \;/ = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$

<u>Svar</u> a) $-\ln(3+\cos x) + C$

b) $\displaystyle\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$

c) $\displaystyle\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$

2. $\begin{cases} xy' + 2y = 3xe^{x^3-1} \\ y(1) = 0 \end{cases}$, $x \neq 0 \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x}y = 3e^{x^3-1}$

$IF = e^{2\ln|x|} = x^2$

$y'x^2 + 2xy = 3x^2e^{x^3-1} \Leftrightarrow (yx^2)' = 3x^2e^{x^3-1} \Rightarrow$

$\displaystyle yx^2 = \int 3x^2 e^{x^3-1}\,dx \;\Big/\; \begin{matrix} t = x^3-1 \\ dt = 3x^2dx \end{matrix} \;\Big/ = \int e^t\,dt = e^{x^3-1} + C.$

$y = x^{-2}e^{x^3-1} + Cx^{-2}$

$y(1) = 0 \Rightarrow C = -1$

<u>Svar</u>: $\displaystyle y = \frac{e^{x^3-1}-1}{x^2}$

3. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x(1+x)^{1/3}}{1-\cos x}$ $\Big/$ $1-\cos x = 1-\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right) = \frac{x^2}{2}+O$

$\sin 2x = 2x + O(x^3)$

$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + O(x^2)$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{2x+O(x^3) - 2x\left(1+\frac{1}{3}x+O(x^2)\right)}{\frac{x^2}{2}+O(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}x^2+O(x^3)}{\frac{x^2}{2}+O(x^4)} =$

$\displaystyle = \lim \frac{-\frac{2}{3}+O(x)}{\frac{1}{2}+O(x^2)} = -\frac{4}{3}$

3b

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\sqrt{x^2-4x}\right)\ \Big/\ t=\frac{1}{x}\ \Big/ =$$

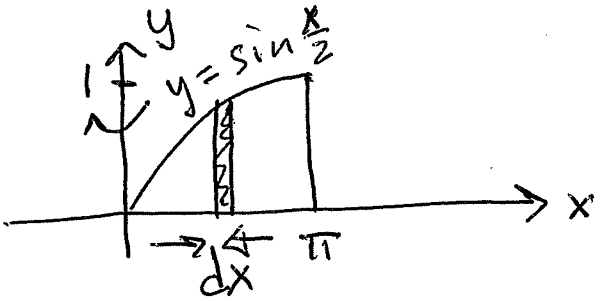
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t\sqrt{1-4t}}{t^2}\ \Bigg/\ \begin{array}{l}\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+O(t^3)\\ \sqrt{1-4t}=1+\frac{1}{2}(-4t)+O(t^2)\end{array}\Bigg/$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\frac{t^2}{2}+O(t^3)-t\left(1+\frac{1}{2}(-4t)+O(t^2)\right)}{t^2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{3}{2}t^2+O(t^3)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{3}{2}+O(t)}{1}=\frac{3}{2}.$$

<u>Svar:</u> a) $-\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{2}$.

4.



$$V=\int_0^{\pi}2\pi x\sin\frac{x}{2}\,dx=$$

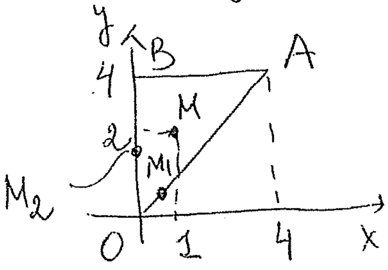
$$=2\pi\int_0^{\pi}x\sin\frac{x}{2}\,dx\ \underset{p.i}{=}\ 2\pi\left(\underbrace{\left[-\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}x\right]_0^{\pi}}_{=0}+2\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx\right)$$

$$=4\pi\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi}=8\pi(1-0)=\underline{\underline{8\pi}}\ \text{V.e.}$$

(5) $f(x,y) = x^2 + xy - 4x - y^2 + 3y - 2$

$$\begin{cases} f'_x = 2x + y - 4 = 0 \\ f'_y = x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix} \Rightarrow M = (1,2)$$

$D: \; 0 \le x \le y \le 4$



$f(1,2) = -1$

OA: $y = x \Rightarrow f(x,x) = x^2 - x - 2, \quad 0 \le x \le 4$

$f'(x,x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \qquad M_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$

BA: $y = 4 \Rightarrow f(x,4) = x^2 - 6, \quad 0 \le x \le 4)$

$f'(x,4) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad f(0,0) = -2 \qquad f(4,4) = 10$

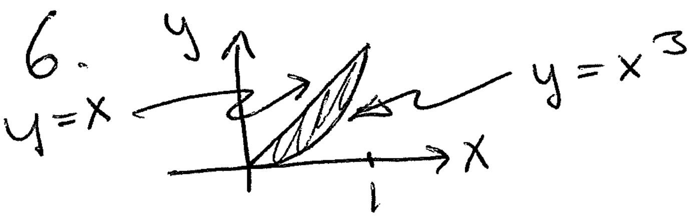
OB: $x = 0 \Rightarrow f(0,y) = -y^2 + 3y - 2, \quad 0 \le y \le 4$

$f'(0,y) = -2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \qquad M_2 = (0, \frac{3}{2})$

$f(M_2) = f(0, \frac{3}{2}) = \frac{1}{4} \qquad f(0,4) = -6$

Svar: $f_{max} = f(4,4) = 10. \; f_{min} = f(0,4) = -6$

6.



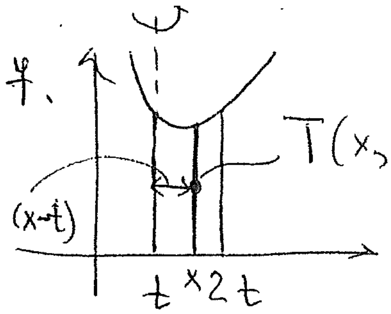
$$\iint_D xy\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{y=x^3}^{y=x} xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^3}^{x} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^7)\,dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \qquad \text{Svar: } \frac{1}{16}$$

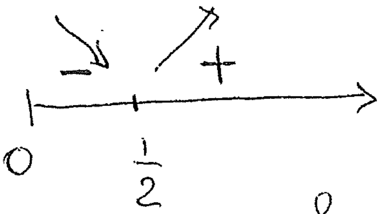
4.



$$dV = 2\pi(x-t)\cdot dA = 2\pi(x-t)\left(4x+\frac{5}{x^3}\right)dx$$

$$V(t) = 2\pi\int_t^{2t}(x-t)\left(4x+\frac{5}{x^3}\right)dx = 2\pi\left(\frac{10}{3}t^3+\frac{5}{8t}\right)$$

$$V'(t) = 2\pi\left(10t^2-\frac{5}{8}\frac{1}{t^2}\right) = 0 \iff t^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$



$$V_{min} = V\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}\pi$$

Svar: $V(t)$ blir minimal då $t = \frac{1}{2}$.