

**Hemtentamen i Matematik, fortsättningskurs. NMAA07/TEN1**  
**2020-03-26, kl 8-12.**

Hjälpmiddel är tillåtna (böcker, anteckningar, miniräknare, dator osv) men det är naturligtvis inte tillåtet att på något sätt samarbeta med eller ta hjälp av annan person.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng.

För betyg  $n$  ( $n = 3, 4$  eller  $5$ ) krävs minst  $4(n-1)$  poäng.

1. Beräkna följande integraler

a)  $\int \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx$  (1p)      b)  $\int \ln \sqrt{x} dx$  (1p)      c)  $\int \frac{3x^2 + 7}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx$  (1p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen  $y' = y \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + xe^{\sqrt{1+x^2}}$  som uppfyller begynnelsevillkoret  $y(0) = 3$ .

3. Området mellan  $x$ -axeln och kurvan  $y = e^{-2x}$ ,  $x \geq 1$ , roteras ett varv kring  $y$ -axeln. Hur stor volym får den kropp som uppkommer vid rotationen?

4. Beräkna följande gränsvärden

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - 3 \ln(1+x)}{5x(1-e^{2x})}$  (1p)      b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cos(x+2) - 1}{(x+3)^{2/3} - 1 - 2(x+2)/3}$  (2p)

5. Undersök om  $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}e^{-x^2}$  har lokalt maximum eller minimum i  $x = 0$ .

6. Beräkna längden av kurvan  $x = \cos^2 t$ ,  $y = \sin^2 t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

7. Beräkna volymen av det område som ligger mellan funktionsytorna  $z = x^2 + y^2$  och  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Bifogas Maclaurinutvecklingar**

*Följande elementära Maclaurinutvecklingar gäller med resttermer i ordoform för  $x$  nära 0:*

(a)  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$

(b)  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$

(c)  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$

(d)  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$

(e)  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$

där  $\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ ,  $\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$  osv.

(f)  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$

# Lösningsskiss till tentamen

1a)  $\int \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx \quad \left/ \begin{array}{l} t = 2 + \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right/ = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$   
 $= \ln|2 + \sin x| + C$

1b)  $\int \ln \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \int \ln x dx \quad \left/ \begin{array}{l} pI \\ g = \ln x \Rightarrow g' = \frac{1}{x} \\ f = 1 \Rightarrow F = x \end{array} \right/ = \frac{1}{2} (x \ln x - \int \frac{x}{x} dx)$   
 $= \frac{1}{2} x \ln x - \frac{x}{2} + C$

1c)  $\int \frac{3x^2 + 7}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx = \int \frac{3x^2 + 7}{(x^2 + 4)(x - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{x - 1} = \frac{x + 1}{x^2 + 4} + \frac{2}{x - 1}$   
 $= \int \frac{x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 4} + 2 \int \frac{dx}{x - 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + 2 \ln|x - 1| + C$

Svar: a)  $\ln|2 + \sin x| + C$  b)  $\frac{1}{2} x \ln x - \frac{x}{2} + C$  c)  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + 2 \ln|x - 1| + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$

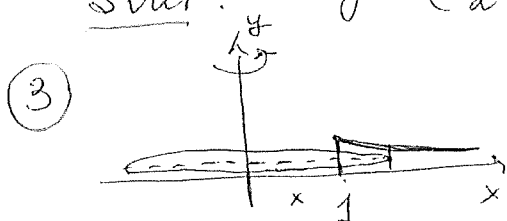
2.)  $y' - y \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x e^{\sqrt{1+x^2}} \quad IF = e^{-\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx} = e^{-\sqrt{1+x^2}}$

$y' e^{-\sqrt{1+x^2}} - y \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\sqrt{1+x^2}} = x \Leftrightarrow (y e^{-\sqrt{1+x^2}})' = x \Leftrightarrow$

$y e^{-\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y = (\frac{x^2}{2} + C) e^{\sqrt{1+x^2}}$

$y(0) = 3 \Rightarrow 3 = C \cdot e \Rightarrow C = 3e^{-1}$

Svar:  $y = (\frac{x^2}{2} + \frac{3}{e}) e^{\sqrt{1+x^2}}$



$dV = 2\pi x dA = 2\pi x f(x) dx$

$V = 2\pi \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x e^{-2x} dx$

$\int_0^M x e^{-2x} dx \quad \left/ \begin{array}{l} pI \\ g = x \quad g' = 1 \\ f = e^{-2x} \quad f' = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right/ = (-\frac{x}{2} e^{-2x})_0^M + \int_0^M \frac{1}{2} e^{-2x} dx =$   
 $= -\frac{M}{2} e^{-2M} + \frac{1}{2} e^{-2} - (\frac{1}{4} e^{-2x})_0^M = -\frac{M}{2} e^{-2M} + \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2M} + \frac{1}{4} e^{-2}$

$\Rightarrow V = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} (\frac{3}{4} e^{-2} - \frac{M}{2} e^{-2M} - \frac{1}{4} e^{-2M}) = \frac{3\pi}{4} e^{-2} \text{ (v.e.)}$

Svar:  $V = \frac{3\pi}{4} e^{-2} \text{ v.e.}$

$$(4a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - 3 \ln(1+x)}{5x(1-e^{2x})} \quad \left/ \begin{array}{l} e^{2x} = 1 + 2x + O(x^2) \\ \sin 3x = 3x + O(x^3) \\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \end{array} \right/ =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + O(x^3) - 3x + \frac{3}{2}x^2 + O(x^3)}{5x(1 - 1 - 2x - O(x^2))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + O(x^3)}{-10x^2 + O(x^3)} =$$

$$= -\frac{3}{20}$$

$$(4b) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cos(x+2) - 1}{(x+3)^{2/3} - 1 - \frac{2}{3}(x+2)} \quad \left/ \begin{array}{l} t = x+2 \\ t \rightarrow 0 \\ \text{där } x \rightarrow -2 \end{array} \right/ =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{(1+t)^{2/3} - 1 - \frac{2}{3}t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4) - 1}{1 + \frac{2}{3}t + \frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)}{2}t^2 + O(t^3) - 1 - \frac{2}{3}t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{t^2}{2} + O(t^4)}{-\frac{1}{9}t^2 + O(t^3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(-\frac{1}{2} + O(t^2))}{t^2(-\frac{1}{9} + O(t))} = \frac{9}{2}$$

Svar: a)  $-\frac{3}{20}$       b)  $\frac{9}{2}$

$$(5) \quad f(x) = \cos x - \frac{1}{2}e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) - \frac{1}{2}(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6)) = 1 - \frac{5}{4!}x^4 + O(x^6)$$

$f(0) = 1 \Rightarrow f(x) - f(0) = -\frac{5}{4!}x^4 + O(x^6) < 0$  för  $x$  nära 0  $\Rightarrow f(x) < f(0)$  för alla  $x$  nära 0

Svar:  $x=0$  är maximipunkt.

$$(6) \quad x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

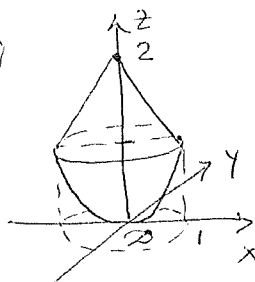
$$s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \quad \left/ \begin{array}{l} x' = -2 \cos t \sin t = -\sin 2t \\ y' = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \end{array} \right/$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 2t + \sin^2 2t} dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} |\sin 2t| dt =$$

$$= \sqrt{2} \left( -\frac{\cos 2t}{2} \right)_0^{\pi/2} = \sqrt{2} \text{ l.e.}$$

Svar:  $s = \sqrt{2}$  l.e.

7.



$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \geq 0 \\ z = 2 - \sqrt{z} \Leftrightarrow z = 1 \text{ (for } z \geq 0) \end{cases}$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$V = \iint_D (2 - \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)) dx dy \quad \left/ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ r = r \end{array} \right/ =$$

$$D': \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array}$$

$$= \iint_D (2 - r - r^2) r dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (2 - r - r^2) r dr \right) d\varphi = 2\pi \int_0^1 (2r - r^2 - r^3) dr =$$

$$= 2\pi \left( r^2 - \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right)_0^1 = 2\pi \left( 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{6} \pi \text{ (v.e.)}$$

Svar:  $V = \frac{5}{6} \pi \text{ v.e.}$