Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Matematik, fortsättningskurs. NMAA07/TEN1
2021-03-26, kl 8-12.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Maclaurinutvecklingar bifogas, se baksidan.
Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng.
För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng.

1) Beräkna följande integraler

a) $\int_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,dx$ c) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$

2) a) Beräkna maclaurinpolynomet av grad 3 till $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$

b) Bestäm konstanten a så att funktionen $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{x^3} & , \; x \neq 0 \\ a & , \; x = 0 \end{cases}$

blir kontinuerlig för $x = 0$

c) Beräkna $\lim_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$

3) Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - y + 2$ då $0 \le y \le x \le 2$.

4) Beräkna $\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$ där D är det område i första kvadranten som begränsas av $x = 0$, $y = 0$ och x+y=2.

5) Beräkna arean av området som ligger mellan x-axeln, y-axeln och kurvan

$$y = \frac{1}{x^2+3x+2}, \qquad x \ge 0\,.$$

6) Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' - \frac{y}{x+1} = \frac{x^3}{x+1}e^{-x}$, $x > 0$ för vilken gäller att $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$

7) Betrakta kurvan $y = \frac{x}{x-1}$. Kurvans tangent i $x = 2$ skär x-axeln då $x = a$.

Bestäm a. Området som begränsas av kurvan $y = \frac{x}{x-1}$, kurvans tangent i $x = 2$ samt linjen $x = a$ roterar ett varv kring x-axeln. Bestäm den därvid uppkomna rotationsvolymen.

Lösningsförslag

1. a. $$\int_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ \text{byt gränser} \end{array} \right| =$$

$$\frac{1}{2}\int_1^2 1\cdot \ln t\,dt \underset{p.i}{=} \frac{1}{2}\left(\Big[t\ln t \Big]_1^2 - \int_1^2 t\,\frac{1}{t}\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\ln 2 - 1 \right) = \underline{\underline{\ln 2 - \frac{1}{2}}}$$

b. $$\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,dx = \int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}\,dx =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \right) dx = \left| \begin{array}{c} \text{H.P ger} \\ A = 2 \\ B = -1 \end{array} \right| =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \Big[2\ln|x+1| - \ln|x+2| \Big]_0^1$$

$$= 2\ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = \underline{\underline{3\ln 2 - \ln 3}}$$

1 c. $$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx \underset{p.i}{=} \Big[x\sin x \Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \Big[\cos x \Big]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}$$

---

2 a. $$f(x) = 3\sin x - \sin 3x =$$

$$3\left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) \right) - \left(3x - \frac{(3x)^3}{3!} + O(x^5) \right) =$$

$$3x - \frac{x^3}{2} - 3x + \frac{9x^3}{2} + O(x^5) =$$

$$= 4x^3 + O(x^5)$$

b. f kont. i $x=0$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \big(4 + \underbrace{O(x^2)}_{\to 0} \big) = 4$$

Svar: $a = 4$

2 c. $\lim\limits_{x\to 1} (2x-1)^{\frac{1}{x-1}} = \left/ \begin{array}{l} t = x-1 \\ x = t+1 \\ t \to 0 \end{array} \right/ =$

$= \lim\limits_{t\to 0} (2t+1)^{\frac{1}{t}} =$

$\lim\limits_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\ln(1+2t)} = \left/ \begin{array}{l} \text{maclaurin.} \\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots \end{array} \right/$

$= \lim\limits_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}(2t + O(t^2))} =$

$\lim\limits_{t\to 0} e^{(2 + \underbrace{O(t)}_{\to 0})} = e^2$

Svar: $\text{Gr.v} = e^2$

---

3. $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - y + 2$

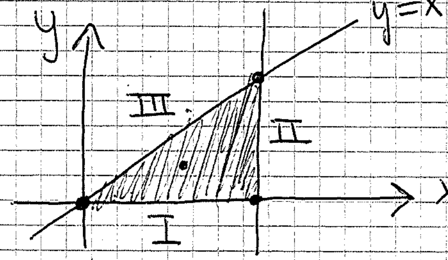
Kontinuerlig.

$0 \le y \le x \le 2$

på kompakt område.

(slutet och begränsat)

$\Rightarrow$ f antar största / minsta värde på området.



Inre stationära punkter.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1/2 \end{array}$$

$\in$ "inre".

<u>Randen</u>.

I. $f(x,0) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$

$(1,0)$ aspirant.

II. $f(2,y) = y^2 - y + 2 = (y - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$

$(2, \frac{1}{2})$

III. $f(x,x) = 2x^2 - 3x + 2 = h(x)$

$h'(x) = 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

$\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

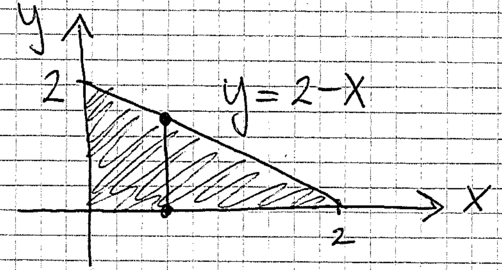
samt hörnen.

Aspirant lista.

(x,y)	$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - y + 2$
$(1, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{4}$ = minsta värde
$(1,0)$	1
$(2, \frac{1}{2})$	$\frac{7}{4}$
$(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$	$\frac{7}{8}$
$(0,0)$	2
$(2,0)$	2
$(2,2)$	4 = största värde

Svar: $\begin{cases} f_{max} = 4 \\ f_{min} = \frac{3}{4} \end{cases}$

4. $$\iint_D (x+2y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{y=0}^{y=2-x} (x+2y)\,dy \right) dx$$



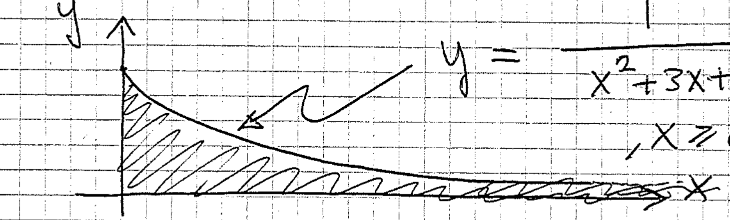
$$= \int_0^2 \left(\left[xy + y^2 \right]_{y=0}^{y=2-x} \right) dx =$$

$$\int_0^2 \left(x(2-x) + (2-x)^2 \right) dx = \int_0^2 (2-x)(x+2-x)\,dx$$

$$= \int_0^2 (4-2x)\,dx = \left[4x - x^2 \right]_0^2 = 8 - 4 = 4$$

Svar: 4

5.



$$y = \frac{1}{x^2+3x+2}, \quad x \geq 0.$$

$$\text{Arean} = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$\int_0^{\omega} \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = \int_0^{\omega} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx =$$

$$\underset{\text{PBU.}}{=} \int_0^{\omega} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \left[\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_0^{\omega} =$$

$$= \ln\left(\frac{\omega+1}{\omega+2}\right) - \ln\frac{1}{2} =$$

$$\ln\left(\frac{\cancel{\omega}(1+\underbrace{\tfrac{1}{\omega}}_{\to 0})}{\cancel{\omega}(1+\underbrace{\tfrac{2}{\omega}}_{\to 0})}\right) + \ln 2 \to \underbrace{\ln 1}_{=0} + \ln 2$$

då $\omega \to \infty$.

Svar: Arean $= \underline{\underline{\ln 2}}$ a.e.

6.

$$y' - \frac{1}{x(x+1)}\,y = \frac{x^2}{x+1}e^{-x}, \quad x > 0$$

$$/\ i.f = e^{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} = \frac{x+1}{x}\ /$$

$$\int \frac{-1}{x(x+1)}\,dx \underset{\text{PBU}}{=} \int\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| + C.$$

mult. med i.f.

$$y'\,\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x^2}\,y = xe^{-x}$$

$$\left(y \cdot \frac{x+1}{x}\right)' = xe^{-x}$$

$$y\,\frac{x+1}{x} = \int \underset{\downarrow}{x}\,\underset{\uparrow}{e^{-x}}\,dx \underset{\text{p.i}}{=} \frac{e^{-x}}{-1}x - \int \frac{e^{-x}}{-1}\,dx =$$

$$-xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$$y = \underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\to 1}\left(-\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\to 0} + C\right) \quad \text{då } x \to \infty$$

forts. nr 6.

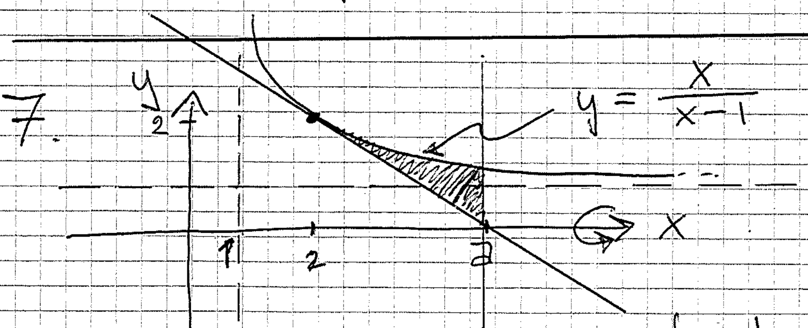
$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 1 \quad \text{ger} \quad C = 1$$

$$y = \frac{x}{x+1}\left(-\frac{x+1}{e^x} + 1\right) =$$

$$-xe^{-x} + \frac{x}{x+1}$$

Svar: $y = -xe^{-x} + \dfrac{x}{x+1}$

7.



$$y' = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \left.\frac{-1}{1}\right|_{x=2} = -1$$

ger $a = 4$

$$V = \int_2^4 \pi\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 dx - \int_2^4 \pi(4-x)^2\,dx =$$

$$\pi\int_2^4\left(\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^2 - (4-x)^2\right)dx =$$

$$\pi\int_2^4\left(1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - (4-x)^2\right)dx =$$

$$\pi\left[x + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{(4-x)^3}{3}\right]_2^4 =$$

$$\pi\left(4 + 2\ln 3 - \frac{1}{3} - 2 + 1 - \frac{8}{3}\right) =$$

$$\pi(2\ln 3) = 2\pi\ln 3 \text{ v.e}$$

Svar: Volymen $= \underline{\underline{2\pi\ln 3}}$ v.e
