Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Matematik, fortsättningskurs. NMAA07/TEN1
2023-08-22, kl 14-18.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Maclaurinutvecklingar bifogas, se baksidan.
Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng.
För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng.

1. Beräkna

   $a)\ \int x\cos 2x\,dx \qquad b)\ \int \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx \qquad c)\ \int \frac{4}{x+x^2}\,dx$

2. Beräkna $\iint_D e^{y^2}$, där D är en triangel med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,1)$ och $(0,1)$.

3. Bestäm konstanten a så att
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x + \ln(1+ax)}{x^2}$$
existerar, samt bestäm gränsvärdet.

4. Hur stor volym har den kropp som uppkommer, då området som ligger mellan x-axeln, kurvan $y = \cos x + \sin x$, $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$, och linjerna $x = \frac{\pi}{4}$ och $x = \frac{\pi}{2}$ roterar ett varv kring x-axeln.

5. Finn den lösning till differentialekvationen $(1+x^2)y' + y = 2$ som har gränsvärdet 3 då $x \to \infty$.

6. Låt $f(x) = x^2\sin(2x^2)$. Bestäm $f^{(60)}(0)$.

7. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = 3 + x - x^2 - y^2$ på triangelområdet $D = \{(x,y):\ 0 \le x \le y \le 2\}$.

Lösningsförslag.

1a) $$\int x\cos 2x\,dx \;\Big/\; PI \;\Big/ = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx =$$

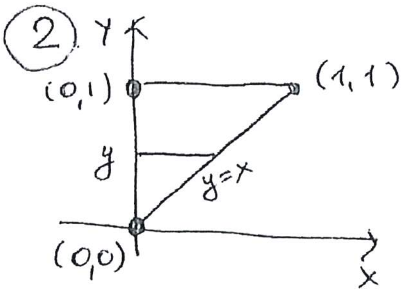
$$= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

1b) $$\int \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx \;\Big/\; \begin{matrix} t = x^3+2 \\ dt = 3x^2dx \end{matrix} \;\Big/ = \int \frac{\frac{4}{3}\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{8}{3}\sqrt{x^3+2} + C$$

1c) $$\int \frac{4}{x+x^2}\,dx \;\Big/\; \frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \;\Big/ = 4\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)dx =$$

$$= 4\left(\ln|x| - \ln|1+x|\right) + C = 4\ln\left|\frac{x}{1+x}\right| + C$$

2)



$$\iint_D e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2}\,dx = \int_0^1 y e^{y^2}\,dy$$

$$\Big/\; \begin{matrix} t = y^2 \\ dt = 2y\,dy \end{matrix} \quad \begin{matrix} y=0 \Rightarrow t=0 \\ y=1 \Rightarrow t=1 \end{matrix} \;\Big/ = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t\,dt = \frac{e-1}{2}$$

Svar: $\iint_D e^{y^2}\,dx\,dy = \frac{e-1}{2}$

3) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

$$\ln(1+ax) = ax - \frac{(ax)^2}{2} + O(x^3) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x + \ln(1+ax)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) + ax - \frac{(ax)^2}{2} + O(x^3)}{x^2} =$$

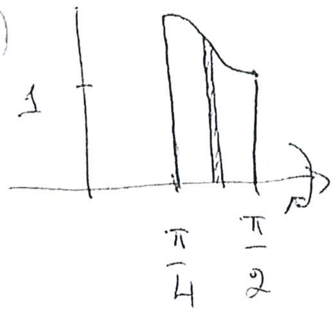
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+a)x + \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + O(x^3)}{x^2} < \infty \Leftrightarrow a = -1$$

Om $a = -1$ får vi

$$\lim \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + O(x)}{1} = \frac{1}{2}.$$

Svar: $a = -1$, $\frac{1}{2}$

4.



$$dV = \pi f^2(x)\,dx \Rightarrow dV = \pi\left(\cos x + \sin x\right) d$$

$$V = \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + 2\sin x \cos x)\,dx = \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \sin 2x)$$

$$= \pi\left(x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi(\pi+2)}{4} \quad (\text{v.e}$$

Svar: $V = \dfrac{\pi(\pi+2)}{4}$ v.e.

5. $(1+x^2)y' + y = 2 \Leftrightarrow y' + \dfrac{1}{1+x^2}y = \dfrac{2}{1+x^2}$

$$IF = e^{\arctan x} \Rightarrow e^{\arctan x} y' + \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} y = \frac{2e^{ar}}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\arctan x} y\right)' = \frac{2e^{\arctan x}}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$y = e^{-\arctan x} \int \frac{2e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = e^{-\arctan x} \cdot \left(2e^{\arctan} + C\right.$$

$$= 2 + Ce^{-\arctan x}$$

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(2 + Ce^{-\arctan x}\right) = 3 \Rightarrow C = e^{\pi/}$$

Svar: $y = 2 + e^{\frac{\pi}{2} - \arctan x}$

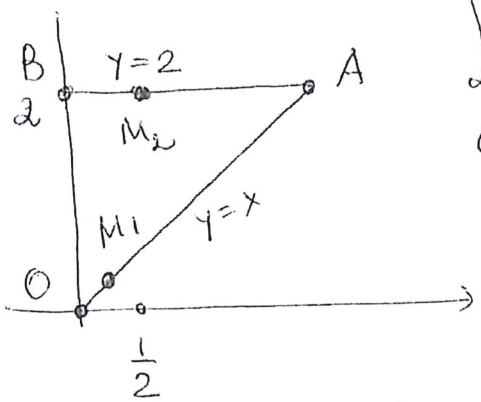
6. $f(x) = x^2 \sin(2x^2) = x^2 \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot 2^{2k+1} \cdot x^{4k+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Alltså $\dfrac{(-1)^{14}}{29!} \cdot 2^{29} \cdot x^{60} = \dfrac{f^{(60)}(0)}{60!} x^{60}$

medför $f^{(60)}(0) = \dfrac{60!}{29!} \cdot 2^{29}$ – Svar.

(7.) $f(x,y) = 3 + x - x^2 - y^2 \quad , \quad (x,y) \in D$



$$\begin{cases} f'_x = 1 - 2x = 0 \iff x = \frac{1}{2} \\ f'_y = -2y = 0 \iff y = 0 \end{cases}$$

Stationära punkten $(\frac{1}{2}, 0) \notin D$

$\Downarrow$

Undersöker randen:

OA: $y = x \Rightarrow f(x,x) = 3 + x - 2x^2 \quad , \quad 0 \le x \le 2$

$f'(x,x) = 1 - 4x = 0 \iff x = \frac{1}{4} \Rightarrow M_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

$f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{25}{8}$, $f(0,0) = 3$, $f(2,2) = -2$

AB: $y = 2 \Rightarrow f(x,2) = x - x^2 - 1$

$f'(x,2) = 1 - 2x = 0 \iff x = \frac{1}{2} \Rightarrow M_2 = (\frac{1}{2}, 2$

$f(\frac{1}{2}, 2) = -\frac{3}{4}$, $f(0,2) = -1$

OB: $x = 0 \Rightarrow f(0,y) = 3 - y^2 \quad , \quad 0 \le y \le 2.$

$f'(0,y) = -2y = 0 \iff y = 0 \ , \ (0,0) \notin (0;$

Svar: $f_{min} = f(2,2) = -2$

$f_{max} = f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{25}{8}.$