Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Matematik, fortsättningskurs. NMAA07/TEN1
2023-03-18, kl 8-12.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Maclaurinutvecklingar bifogas, se baksidan.
Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng.
För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng.

1) Beräkna

a) $\int x^2 \ln x\,dx$ b) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ c) $\int \frac{x-5}{x^2-5x+6}dx$

2) Beräkna $\iint_D xy\,dxdy$ där D är det område i första kvadranten som begränsas av $y = 4x$ och $y = x^3$.

3) a) Beräkna maclaurinpolynomet av grad 3 till $f(x) = \ln(1+\sin x)$

b) Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{e^x - 1 - x}$

c) Har funktionen $f(x) = x\sin(2x + x^2)$ lokalt extremvärde för x=0 ?
Ange om det eventuella extremvärdet är lokalt max eller lokalt min.

4) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området mellan x-axeln och kurvan $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}, 0 \le x \le 1$ roteras ett varv kring y-axeln.

5) a) Visa att $y = \frac{x}{\ln x}$ är en lösning till differentialekvationen $x^2y' = xy - y^2$ (1p)

b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

6) Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = x - x^2 + y^2$ då $0 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 1$.

7) Bestäm konstanten A så att gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(3x+2) + \ln(3x-2) - 2\ln x + A}{\arctan(1-\cos(1/x))}$$

existerar. Bestäm också gränsvärdet.

Kortfattade lösningar till tentamen

NMAA07. 2023-03-18.

1 a. $$\int x^2 \ln x \, dx \underset{p.i}{=} \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \underline{\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C}$$

b. $$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \left/ \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \end{array} \right/ =$$

$$= \int \frac{\sin t}{\frac{1}{2}}\,dt = -2\cos t + C =$$

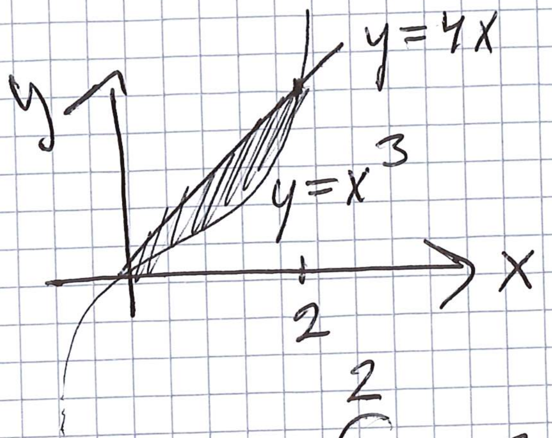
$$= \underline{-2\cos\sqrt{x} + C}.$$

c. $$\int \frac{x-5}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{x-5}{(x-2)(x-3)}\,dx =$$

$$\underset{\text{PBU.}}{=} \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{-2}{x-3}\right)dx =$$

$$= \underline{3\ln|x-2| - 2\ln|x-3| + C}$$

2. $$\iint_D xy\,dx\,dy = I.$$



$$I = \int_0^2 \left(\int_{y=x^3}^{y=4x} xy\,dy \right) dx = \int_0^2 \left(\left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=x^3}^{y=4x} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{2}\left(16x^2 - x^6\right) dx = \int_0^2 \left(8x^3 - \frac{x^7}{2}\right) dx =$$

$$= \left[2x^4 - \frac{x^8}{16} \right]_0^2 = 32 - 16 = 16.$$

Svar: 16.

3 a. $f(x) = \ln(1+\sin x) =$

$$= \ln\Big(1 + \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)}_{=t}\Big) =$$

$$= \left/ \begin{array}{l} \ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + O(t^4) \\ x \text{ nära noll} \Rightarrow t \text{ nära noll} \end{array} \right/ =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + O(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

Svar: $P_3(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$

---

3 b. $$\frac{\ln\cos x}{e^x - 1 - x} = \frac{\ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)\right)}{1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) - 1 - x} =$$

$$= \frac{-\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{\frac{x^2}{2} + O(x^3)} = \frac{-\frac{1}{2} + \overset{\to 0}{O(x^2)}}{\frac{1}{2} + \underset{\to 0}{O(x)}} \to -1$$

då $x \to 0$

3 c.

$$f(x) = x\sin(\underbrace{2x+x^2}_{=t}) =$$

$$= \left/ \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \mathcal{O}(t^5) \right/ =$$

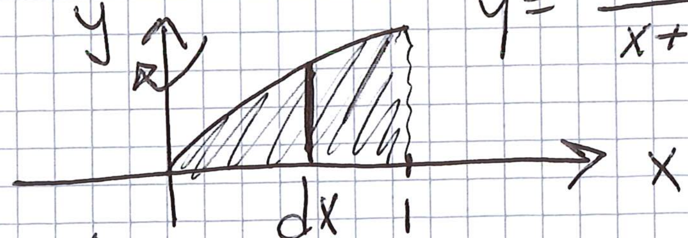
$$= x\left(2x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right) = 2x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

jfr med $g(x) = 2x^2$ för x nära noll.

Svar: Ja f har lokalt min i $x=0$.

4.

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$



$$V = \int_0^1 2\pi x \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx = \left/ \begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right/ =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{2t^4}{t^2+1}\,dt = 4\pi \int_0^1 \frac{t^4}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 4\pi \int_0^1 \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right) dt =$$

Polynomdivision.

$$= 4\pi \left[\frac{t^3}{3} - t + \arctan t \right]_0^1 =$$

$$= 4\pi \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} \right) = \underline{\underline{\pi^2 - \frac{8\pi}{3} \text{ v.e.}}}$$

---

5. a. $y = \frac{x}{\ln x}$ Kvotregeln.

$$y' = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$V.L = x^2 y' = \frac{x^2(\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$H.L = xy - y^2 = \frac{x^2}{\ln x} - \frac{x^2}{(\ln x)^2} =$$

$$= \frac{x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2(\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

V.S.V.

5 b. $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}} \iff$

$/ \ i.f = e^{\frac{x^2}{2}} \ /$

$$y' e^{\frac{x^2}{2}} + x e^{\frac{x^2}{2}} y = e^0$$

$$y e^{\frac{x^2}{2}} = \int 1 \, dx = x + C$$

$$y = (x + C) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

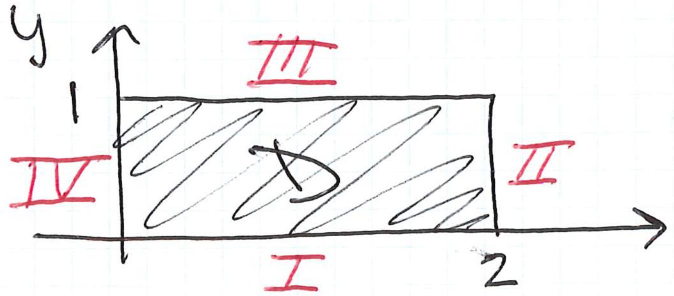
$y(0) = 1$ ger $1 = C e^0$

$$C = 1$$

Svar: $y = (x+1) e^{-\frac{x^2}{2}}$

---

6. $f(x,y) = x - x^2 + y^2$



f kont. på kompakt mängd.

$$\begin{cases} f'_x = 1-2x = 0 \\ f'_y = 2y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (\tfrac{1}{2}, 0)$$

$\notin D$:s inre.

Randen

I. $f(x,0) = x - x^2 = h(x)$

$h'(x) = 1-2x = 0 \implies x = 1/2$.

Återigen punkten $(\tfrac{1}{2}, 0)$.

$\in$ I.

II. $f(2,y) = y^2 - 2$, $0 \leq y \leq 1$

$\nearrow$

III. $f(x,1) = x - x^2 + 1 = g(x)$

$g'(x) = 1-2x = 0 \implies x = \tfrac{1}{2}$.

$(\tfrac{1}{2}, 1) \in$ III.

IV. $f(0,y) = y^2$, $0 \leq y \leq 1$.

$\nearrow$

Till sist en aspirantlista.

Glöm ej <u>hörnen</u>.

(x,y)	$f(x,y) = x - x^2 + y^2$
$(\frac{1}{2},0)$	$\frac{1}{4}$
$(\frac{1}{2},1)$	$\frac{5}{4}$ = Största värde
$(0,0)$	0
$(2,0)$	-2 = Minsta värde
$(2,1)$	-1
$(0,1)$	1

---

7. då $x \to \infty$.

$$\frac{\ln\left(\frac{9x^2-4}{x^2}\right) + A}{\arctan\left(1-\left(1-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right)} =$$

$$= \frac{\ln\left(9\left(1-\frac{4}{9x^2}\right)\right) + A}{\arctan\left(\frac{1}{2x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)} =$$

Sätt $A = -\ln 9$

$$= \frac{\ln 9 + \ln\left(1-\frac{4}{9x^2}\right) + A}{\frac{1}{2x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{4}{9x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{1}{2x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{4}{9} + \overbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)}^{\to 0}}{\frac{1}{2} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0}} \longrightarrow -\frac{8}{9}.$$

då $x \to \infty$

Svar: $A = -\ln 9$

$\text{Gr.v} = -\frac{8}{9}$.