Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Matematik, fortsättningskurs. NMAA07/TEN1
2024-03-23, kl 8-12.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Maclaurinutvecklingar bifogas, se baksidan.
Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng.
För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng.

1. Beräkna följande integraler

   a) $\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}dx$ b) $\int x\sin(3x)\ dx$ c) $\int \frac{1}{x^3-x}dx$

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' + 2y = \frac{x}{x-1}$, $x > 1$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(2) = 1$.

3. Bestäm volymen av den kropp som uppkommer då området som ligger mellan x-axeln och kurvan $y = \ln x, 1 \le x \le e$ roteras ett varv kring y-axeln.

4. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ på triangelområde som begränsas av linjerna $y = x$, $y = -x$ och $x = 2$.

5. Beräkna $\iint\limits_D xy\ dxdy$, där D begränsas av sträckorna mellan (0,0), (1,1) och (1,0).

6. a) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x^4}-1-x^2}{\cos(2x^2)-1}$. (2p)

   b) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 4 till $f(x) = \sin(x + x^2)$

7. Undersök om $f(x) = e^{x^2} - \sqrt[3]{1+3x^2}$ har lokalt maximum eller minimum i $x = 0$.

Bifogas Maclaurinutvecklingar

Lösningsförslag.

1. a. $$\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}\,dx = \left/ \begin{array}{l} t = 9+x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ \text{byter gränser} \end{array} \right/ =$$

$$= \int_9^{25} \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_9^{25} = \frac{1}{3}(125-27) = \frac{98}{3}$$

b. $$\int x \sin 3x\,dx \underset{p.i}{=} -\frac{\cos 3x}{3}x - \int -\frac{\cos 3x}{3}\,dx =$$

$$= -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{\sin 3x}{9} + C$$

c. $$\int \frac{1}{x(x+1)(x-1)}\,dx \underset{\text{PBU}}{=} \int\left(\frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right)dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$$

2. $$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x-1}, \quad x > 1$$

$$\left/ \begin{array}{l} i.f = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2 \\ \text{mult. med } i.f. \end{array} \right/$$

$$y'x^2 + 2xy = \frac{x^2}{x-1}$$

$$(yx^2)' = \frac{x^2}{x-1}$$

$$yx^2 = \int \frac{x^2}{x-1}\,dx = \int \frac{x(x-1)+(x-1)+1}{x-1}\,dx$$

Polynomdivision

$$yx^2 = \int \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$$

$$y = \frac{1}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\ln|x-1|}{x^2}+\frac{C}{x^2}$$

$y(2)=1$ ger $\quad 1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{\ln 1}{4}}_{=0}+\frac{C}{4}$

$$\Longrightarrow \quad C=0$$

Svar: $\quad y = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln|x-1|}{x^2}$

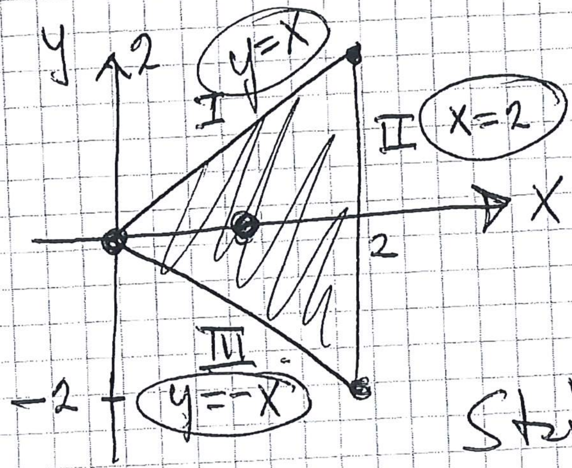
3. 

$$V = \int_1^e 2\pi x \ln x\,dx \underset{p.i}{=}$$

$$= 2\pi\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{e^2}{2} - 0 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e\right) = 2\pi\left(\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}(e^2+1)\text{ ve}$$

4.



f kont. på kompakt mängd.

Stationära punkter i det inre.

$$\begin{cases} f'_x = 2x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2x-2 \\ f'_y = -x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

insatt i (2). ger

$$-x + 2(2x-2) + 1 = 0$$

$$3x = 3 \Rightarrow x = 1,\ y = 0$$

$$f(1,0) = -1$$

Randen. I. $f(x,x) = x^2 - x,\ 0 \le x \le 2$

$$f' = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \qquad f(0,0) = 0$$

$$f(2,2) = 2$$

II. $f(2,y) = 4 - 2y + y^2 - 4 + y = y^2 - y$

$$f' = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$f(2, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$f(2, -2) = \underline{\underline{6}}$

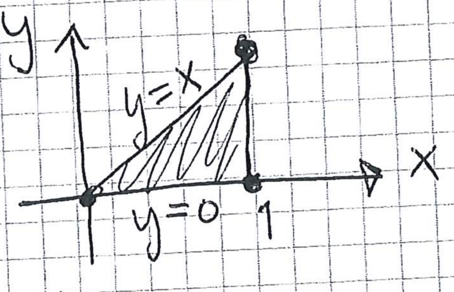
$\underline{\text{III}}$. $f(x, -x) = 3x^2 - 3x$

$f' = 6x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$.

Svar: $\begin{cases} \text{Största värde} = 6 \\ \text{Minsta värde} = -1 \end{cases}$

5. $\iint_D xy\,dx\,dy =$



$$= \int_0^1 \left(\int_{y=0}^{y=x} xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - 0 \right) dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8} - 0 = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

6. a. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x^4} - 1 - x^2}{\cos(2x^2) - 1} = \Big/ \text{Maclaurin-utv.} \Big/$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x^2} + x^4 + \frac{x^4}{2} + O(x^6) - \cancel{1} - \cancel{x^2}}{\cancel{1} - \frac{4x^4}{2} + O(x^8) - \cancel{1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}\left(\frac{3}{2} + \overset{\to 0}{O(x^2)}\right)}{\cancel{x^4}\left(-2 + \underset{\to 0}{O(x^4)}\right)} = -\frac{3}{4}$$

b. $$\sin(x+x^2) = \Big/ \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \quad t = x+x^2 \Big/$$

$$= x + x^2 - \frac{(x+x^2)^3}{6} + O(x^5) =$$

$$= x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^4}{6} + O(x^5) =$$

$$= x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + O(x^5).$$

Svar: $P_4(x) = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4$

7. $f(x) = e^{x^2} - (1+3x^2)^{\frac{1}{3}} =$

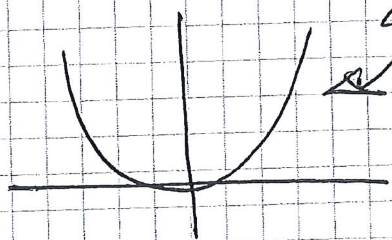
Maclaurin

$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6) - \left(1 + x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) 9x^4}{2} + O(x^6)\right)$$

$$= \cancel{1} + \cancel{x^2} + \frac{1}{2}x^4 \cancel{-1} - \cancel{x^2} + x^4 + O(x^6) =$$

$$= \frac{3}{2}x^4 + O(x^6)$$

$f(x) \approx g(x) = \frac{3}{2}x^4$ för x nära noll.



Svar: f har lokalt minimum i $x=0$.