LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Magnus Berggren

TENTAMEN
Kurskod NMAA17 Provkod TEN1
2015-01-14 kl 8.00-13.00

Hjälpmedel: Endast formelblad (bifogas).
OBS! Uppgifterna är ej ordnade i svårighetsgrad. Maxpoäng=25p
För betyg 3 krävs minst 10p, för betyg 4 minst 16p och för betyg 5 minst 21p.

---

1. Lös ekvationerna

a) $(\ln x)^2 = \ln x^2$ (1p)

b) $\cos^2 x + \cos x = 0$ (1p)

c) $2^x + 2^{3-x} = 9$ (1p)

2. En populations tillväxt i antal beskrivs av följande differentialekvation
$N'(t) = kN(t) \quad , \quad N(0) = 20 \quad , \quad N(4) = 1000$
Lös differentialekvationen. Hur stor är populationen efter 8 år (tiden t=8)?
Hur många år tar det för populationen att växa till en storlek av 4000 individer? (2p)

3. Finn alla stationära punkter (dvs punkter där $f'(x) = 0$) för

$$f(x) = e^x (x^2 - 5x + 7)$$

och bestäm därefter funktionens lokala extrempunkter dvs max och min. (2p)

4. Antalet bakterier i en bakteriekoloni är vid tiden t lika med $N(t) = Ca^t$ där t mäts i minuter. Kolonin fördubblas på 10 minuter och antalet bakterier vid tiden $t = 0$ är 500. Efter hur många minuter är antalet bakterier lika med 700 ?
(2p)

5. En insektspopulation som från början har 100 individer, ökar i storlek med hastigheten $3t^2 + 6t$, där t är tiden i dagar. Hur många insekter finns i populationen efter 5 dagar?
(1p)

6. Koncentrationen y av ett ämne varierar med tiden t enligt

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \quad , t \geq 0 \quad , \quad (\beta > \alpha > 0)$$

Vid vilken tidpunkt är koncentrationen maximal ? (2p)

7. Beräkna

a) $\int_0^{\infty} xe^{-3x}dx$ b) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$ c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}$ (3p)

8. a) Ange maclaurinpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x) = \cos\sqrt{x}$ (1p)

b) Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}-1}{\ln(1+x)-x}$ (2p)

9. Vätejodid bildas när väte och jod reagerar med varandra. Följande modell beskriver förloppet,

om y(t)=vätekoncentrationen som omvandlats vid tiden t så är

$$\frac{dy}{dt} = k(0.01-y)(0.02-y) \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y(1)=0.006$$

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen ovan.

Bestäm $\lim_{t\to\infty} y(t)$ (3p)

10. Lös matrisekvationen

$AX = A + B$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (2p)

11. En population bestående av tre åldersklasser (n_0, n_1, n_2) har följande demografiska egenskaper:

$F_0 = 0$, $F_1 = 45$, $F_2 = 0$, $P_0 = 0{,}2$, $P_1 = 0{,}5$, $P_2 = 0$

F_i anger antalet avkommor som en individ i åldersklass (i) får och P_i anger sannolikheten att en individ i åldersklass (i) överlever och går in i nästa åldersklass.

Matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ beskriver populationens förändring från tiden t till t+1.

Bestäm alla egenvärden till matrisen. Bestäm också en egenvektor som är kopplad till det största egenvärdet.

(2p)

Lösningsförslag NMAA17, 150114.

1. a. $(\ln x)^2 = \ln x^2 \quad , \quad t = \ln x$

$$t^2 = 2t$$

$$t(t-2) = 0$$

$t_1 = 0$ fall 1. $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$t_2 = 2$ fall 2. $\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

Svar: $x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = e^2$

b. $\cos^2 x + \cos x = 0$

$$\cos x\,(\cos x + 1) = 0$$

fall 1. $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

fall 2. $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + n2\pi$

Svar: $x = \begin{cases} \pi/2 + n\pi \\ \pi + n2\pi \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$

c. $2^x + \frac{2^3}{2^x} = 9 \quad , \quad t = 2^x$

$$t + \frac{8}{t} = 9$$

$$t^2 - 9t + 8 = 0$$

$\begin{cases} t_1 = 1 = 2^{x_1} \\ t_2 = 8 = 2^{x_2} \end{cases}$ Svar: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

2. $N'(t) - kN(t) = 0 \quad , \quad \text{i.f} = e^{-kt}$

$$N'(t)e^{-kt} - ke^{-kt}N(t) = 0$$

$$\left(N(t)e^{-kt}\right)' = 0$$

$$N(t)e^{-kt} = C$$

$N(t) = Ce^{kt}$ $\quad N(0) = 20$ ger $C = 20$

$N(t) = 20e^{kt}$ $\quad N(4) = 1000$ ger

$$1000 = 20e^{4k}$$

$$k = \frac{\ln 50}{4}$$

$$N(t) = 20e^{\frac{\ln 50}{4} \cdot t}$$

$$N(8) = 20e^{2\ln 50} = 20 \cdot (50)^2 = 50\,000$$

$$4000 = 20e^{\frac{\ln 50}{4} t}$$

$$t = \frac{4\ln 200}{\ln 50}$$

Svar: $\begin{cases} N(8) = 50000 \text{ st.} \\ t = \frac{4\ln 200}{\ln 50} \text{ ger } N = 4000 \end{cases}$

3. $f'(x) = e^x(x^2-5x+7) + e^x(2x-5) =$

$= e^x(x^2-3x+2) = \underbrace{e^x}_{>0}(x-1)(x-2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

x		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Svar: $\begin{cases} x=1 \text{ ger lokalt max.} \\ x=2 \text{ ger lokalt min.} \end{cases}$

4. $N(t) = Ca^t$ där $C = 500$

$N(10) = 2C$ ger $2C = Ca^{10}$

$a = (2)^{\frac{1}{10}}$ När är $N = 700$?

$700 = 500\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^t$

$\frac{7}{5} = 2^{\frac{t}{10}} \Rightarrow \ln\frac{7}{5} = \ln 2^{\frac{t}{10}} = \frac{t}{10}\ln 2$

Svar: $t = \frac{10\ln\frac{7}{5}}{\ln 2}$ ger $N = 700$.

5. $N'(t) = 3t^2 + 6t$, tillväxthast.

Antalet ind. = $N(t) = t^3 + 3t^2 + C$

$N(0) = 100$ ger $C = 100$

$N(t) = t^3 + 3t^2 + 100$

$N(5) = 5^3 + 3\cdot 5^2 + 100 = 300$.

Svar: $\underline{\underline{N(5) = 300 \text{ st}}}$.

6. Sök y_{max}

$y'(t) = \underbrace{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}_{>0}\left(-\alpha e^{-\alpha t} + \beta e^{-\beta t}\right) = 0$

$\Rightarrow \alpha e^{-\alpha t} = \beta e^{-\beta t}$

$e^{(\beta-\alpha)t} = \frac{\beta}{\alpha}$

t		$\frac{\ln(\frac{\beta}{\alpha})}{\beta-\alpha}$	
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$

Svar: $\underline{\underline{t = \frac{\ln(\frac{\beta}{\alpha})}{\beta-\alpha}}}$ ger y_{max}.

7. a. $\int_0^\omega x e^{-3x}\,dx \underset{p.i}{=} \left[\frac{e^{-3x}}{-3}\cdot x\right]_0^\omega - \int_0^\omega \frac{e^{-3x}}{-3}\,dx =$

$= \underbrace{\frac{\omega}{-3e^{3\omega}}}_{\to 0} - 0 + \frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{e^{-3\omega}}{-3}}_{\to 0 \text{ då } \omega\to\infty} + \frac{1}{3}\right) \longrightarrow \frac{1}{9}$ då $\omega \to \infty$.

b. $\int_1^\omega \frac{1}{x^2}\ln x\,dx \underset{p.i}{=} \Big[\underbrace{-\frac{1}{x}\ln x}_{\to 0 \text{ då } \omega\to\infty}\Big]_1^\omega + \int_1^\omega \frac{1}{x^2}\,dx =$

$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\omega \longrightarrow 1$ då $\omega \to \infty$.

c. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

konv. geometrisk serie.

Svar: 7 a. $\frac{1}{9}$

b. 1

c $\frac{4}{3}$

8. a. $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$

$t = \sqrt{x}$ ger

$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + \mathcal{O}(x^3)$

Svar: $P_2(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24}$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{\ln(1+x) - x} = \Big/ \text{Maclaurin} \Big/ =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - x^2 + \mathcal{O}(x^4) - \cancel{1}}{\cancel{x} - \frac{x^2}{2} - \cancel{x} + \mathcal{O}(x^3)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\big(-1 + \underbrace{\mathcal{O}(x^2)}_{\to 0}\big)}{\cancel{x^2}\big(-\frac{1}{2} + \underbrace{\mathcal{O}(x)}_{\to 0}\big)} = 2$

Svar: $\underline{\underline{\text{Grv} = 2}}$.

<u>Separabel diff. ekv.</u>

9. $\frac{dy}{dt} = k(0{,}01-y)(0{,}02-y)$

$$\int \frac{1}{(0{,}01-y)(0{,}02-y)}\,dy = \int k\,dt$$

PBU ger $A=100$ $B=-100$.

$$\int \left(\frac{A}{0{,}01-y} + \frac{B}{0{,}02-y}\right) dy = \int k\,dt$$

$$100 \ln\left(\frac{0{,}02-y}{0{,}01-y}\right) = kt + C$$

$$\ln\left(\frac{0{,}02-y}{0{,}01-y}\right) = \frac{kt}{100} + D$$

$y(0)=0$ ger $D = \ln 2$

$y(1) = 0{,}006$ ger $\ln\frac{7}{2} = \frac{k}{100} + \ln 2$

$\Rightarrow$ $k = 100 \ln\frac{7}{4}$

$$\ln\left(\frac{0{,}02-y}{0{,}01-y}\right) = t\ln\frac{7}{4} + \ln 2$$

$$\frac{0{,}02-y}{0{,}01-y} = \left(\frac{7}{4}\right)^t \cdot 2$$

$$0{,}02 - y = 2\left(\frac{7}{4}\right)^t (0{,}01-y)$$

$$y\left(2\left(\frac{7}{4}\right)^t - 1\right) = 0{,}02\left(\frac{7}{4}\right)^t - 0{,}02$$

$$y(t) = \frac{0{,}02\left(\left(\frac{7}{4}\right)^t - 1\right)}{2\left(\frac{7}{4}\right)^t - 1} \longrightarrow 0{,}01$$ då $t \to \infty$.

Svar: $y(t) = \frac{0{,}02\left(\left(\frac{7}{4}\right)^t - 1\right)}{2\left(\frac{7}{4}\right)^t - 1}$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0{,}01$$

10.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -1 \quad (-2) \\ 2x_1 + 5x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_3 = -1 \\ -x_3 = 4 \end{cases}$$

$x_3 = -4 \qquad x_1 = 11$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 = 4 \quad (-2) \\ 2x_2 + 5x_4 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 3x_4 = 4 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = 0 \qquad x_2 = 4$

Svar: $X = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

11.

S.E. $\begin{vmatrix} -\lambda & 45 & 0 \\ 0{,}2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -\lambda \end{vmatrix} = / \text{utv. rad 1} /$

$$= -\lambda^3 - 45(-0{,}2\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda =$$

$$= \lambda(9 - \lambda^2) = \lambda(3-\lambda)(3+\lambda) = 0$$

Svar: $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -3 \quad \lambda_3 = 3$

egenvärden

$\lambda_3 = 3$ Sök tillhörande egenvektorer

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 45 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 15 \\ 2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 45 & 0 & 0 \\ 3 & -45 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -45 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} n_0 = 90t \\ n_1 = 6t \\ n_2 = t \end{cases}$$

Svar: $\begin{cases} n_0 = 90 \\ n_1 = 6 \\ n_2 = 1 \end{cases}$ är en egenvektor hörande till egenvärdet 3.