LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Provkod TEN1
Magnus Berggren

TENTAMEN
Kurskod NMAA17

2016-01-13 kl 8.00-13.00

Hjälpmedel: Endast formelblad (bifogas).
OBS! Uppgifterna är ej ordnade i svårighetsgrad. Maxpoäng=25p
För betyg 3 krävs minst 9p, för betyg 4 minst 15p och för betyg 5 minst 20p.

---

1. Lös ekvationerna

a) $\ln x + \ln(x+1) = \ln 6$ (1p)

b) $e^{x} + 50e^{-x} = 15$ (1p)

c) $\cos 3x = \dfrac{1}{2}$ (1p)

2. För bakteriekulturer gäller under ideala förhållanden att antalet celler i kulturen växer med en hastighet som är proportionell mot antalet celler. Om vi betecknar antalet celler vid tiden t (min) med N(t) gäller alltså:

$N'(t) = cN(t)$ där c är en positiv konstant.

Lös denna differentialekvation.
Antag att $N(0) = 6 \cdot 10^{10}$ och $N(90) = 4 \cdot 10^{11}$.
Bestäm konstanten c.
Hur lång tid tar det för antalet celler att fördubblas ?

(3p)

3. Koncentrationen $y(t)$ av ett ämne varierar med tiden t enligt

$y(t) = 2te^{-t^2+t}$, $t \geq 0$

Vid vilken tidpunkt är koncentrationen maximal ?

(2p)

4. En population som tillväxer enligt den logistiska modellen har tillväxthastigheten

$$W = rN(1 - \frac{N}{K}) \quad , \quad r = 0.5 \quad , \quad K = 600$$

Vid vilken populationsstorlek (N) växer populationen som snabbast ?
dvs maximera W med avseende på N.

(2p)

5. Beräkna

a) $\int x\ln(x+1)dx$ b) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+3)}dx$ c) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

(3p)

6. En population av fjällämlar svänger i antal N enligt följande:

$$N(t) = 200 + 10\cos(\frac{2\pi t}{5})$$

Beräkna den genomsnittliga populationsstorleken under tidsintervallet t=0 till t=1.25.

(2p)

7. a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{2 - x^2 - 2\cos x}{x^4}$

(2p)

b) Bestäm maclaurinpolynomet av grad 2 till $f(x) = e^x \sin x$

(1p)

8. En laxodlare vill veta hur många laxar han maximalt kan få i en inhägnad vid tillförsel av en konstant mängd med föda. Låt y beteckna det antal laxar som finns i inhägnaden vid tiden t. Om den maximala mängden lax betecknas M är det rimligt att anta att tillväxthastigheten $\frac{dy}{dt} = ky(M-y)$.
Vid ett försök startade han med 100 laxar. Efter 2 år fanns det 800 laxar och efter ytterligare 2 år fanns där 3200 laxar. Bestäm det maximala antalet laxar M , som kan livnära sig vid den konstanta näringstillförseln. När är tillväxthastigheten som störst ?

(3p)

9. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lös ekvationssystemet $AX = B$ dvs bestäm matrisen X .

(2p)

10. En population bestående av tre åldersklasser (n_0, n_1, n_2) har följande demografiska egenskaper:

$$F_0 = 0\,,\; F_1 = 40\,,\; F_2 = 0\,,\; P_0 = 0{,}1\,,\; P_1 = 0{,}5\,,\; P_2 = 0$$

F_i anger antalet avkommor som en individ i åldersklass (i) får och P_i anger sannolikheten att en individ i åldersklass (i) överlever och går in i nästa åldersklass.

Matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 40 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ beskriver populationens förändring från tiden t till t+1.

Bestäm alla egenvärden till matrisen. Bestäm också en egenvektor som är kopplad till det största egenvärdet.

(2p)

Kortfattade lösningsförslag till tentamen

NMAA17, 2016-01-13

1. a. $\ln x + \ln(x+1) = \ln 6 \quad , \quad x>0$

$\ln(x^2+x) = \ln 6$

$x^2 + x = 6 \quad , \quad x>0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = -\frac{1}{2}\underset{(-)}{+}\frac{5}{2} = 2$

Svar: $x = 2$.

1 b. $e^x + 50e^{-x} = 15$

$e^x + \frac{50}{e^x} = 15 \qquad$ Sub. $t = e^x > 0$

$t + \frac{50}{t} = 15$

$t^2 - 15t + 50 = 0$

$t = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{200}{4}} = \frac{15}{2} \pm \frac{5}{2}$

$t = \begin{cases} 10 \\ 5 \end{cases}$

Svar:

fall 1. $e^x = 10 \Rightarrow x_1 = \ln 10$

fall 2. $e^x = 5 \Rightarrow x_2 = \ln 5$.

1 c. $\cos 3x = \frac{1}{2}$

$3x = \pm\frac{\pi}{3} + n2\pi$

Svar: $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{n2\pi}{3}$, n heltal

2. $N'(t) = cN(t)$

$N'(t) - cN(t) = 0 \qquad$ i.f $= e^{-ct}$

$\left(N(t)e^{-ct}\right)' = 0$

$N(t)e^{-ct} = D$

$N(t) = De^{ct} \qquad N(0) = 6\cdot 10^{10}$ ger $D = 6\cdot 10^{10}$

$N(t) = 6\cdot 10^{10} e^{ct} \qquad N(90) = 4\cdot 10^{11}$ ger

$4\cdot 10^{11} = 6\cdot 10^{10} e^{90c} \Leftrightarrow \underline{\underline{c = \frac{\ln(\frac{20}{3})}{90}}}$

fördubbling ?

$2N(0) = N(0)e^{ct}$

$t = \frac{\ln 2}{c}$

Svar: $\left\{ t = \frac{\ln 2}{c} \right.$ ger fördubbling.

3. $y(t) = 2te^{-t^2+t}$, $t \geq 0$

$y'(t) = 2e^{-t^2+t} + 2te^{-t^2+t} \cdot (-2t+1) =$

$= e^{-t^2+t}(2 - 4t^2 + 2t) =$

$= \underbrace{e^{-t^2+t}}_{>0}(t-1)\underbrace{(-4t-2)}_{<0}$ för $t \geq 0$

$y'(t) = 0$ ger $t = 1$.

	0		1	
$y'(t)$		+	0	−
$y(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

Svar: y_{max} fås då $t = 1$.

---

4. $\dot{N} = f(N) = r\left(N - \frac{N^2}{K}\right)$ parabel "ledsen mun"

$f'(N) = r\left(1 - \frac{2N}{K}\right) = 0 \Rightarrow N = \frac{K}{2}$

Svar: När $N = 300$ växer pop. som snabbast.

5a $\int \underset{\uparrow}{x} \underset{\downarrow}{\ln(x+1)}\,dx \underset{p.i}{=} \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x+1}\,dx$ polynomdiv

$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx =$

$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right) + C =$

$= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C$

b. $\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx = \int_1^\infty \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}\right) dx$ $\Rightarrow$ $A = 1/2$, $B = -1/2$

$= \int_1^\infty \left(\frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x+3}\right) dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|\right]_1^\infty = \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \ln\frac{2}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{\ln 2}{2}}}$

c. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots =$

Geometrisk serie kvot $= 1/2$

$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^\infty}^{\to 0}}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

6. $$\bar{N} = \frac{1}{1{,}25-0}\int_0^{5/4}\left(200+10\cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right)\right)dt =$$

$$= \frac{4}{5}\left[200t + \frac{10\sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right)}{\frac{2\pi}{5}}\right]_0^{5/4} =$$

$$= \frac{4}{5}\left(250 + \frac{25}{\pi}\cdot 1 - 0 - 0\right) =$$

$$= \underline{\underline{200 + \frac{20}{\pi}}} \text{ st.}$$

7 a. $$\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2-2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\mathcal{O}(x^6)\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+\mathcal{O}(x^6)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12}+\underbrace{\mathcal{O}(x^2)}_{\to 0}\right)$$

$$= -\frac{1}{12}$$

Svar: Gv $= \underline{\underline{-\frac{1}{12}}}$

7 b. $$f(x) = e^x \sin x =$$

$$= \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\mathcal{O}(x^3)\right)\left(x+\mathcal{O}(x^3)\right) =$$

$$= x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

Svar: $P_2(x) = \underline{\underline{x+x^2}}$

8. $$\frac{dy}{dt} = ky(M-y)$$ Separabel diff. ekv.

$$\int \frac{1}{y(M-y)}\,dy = \int k\,dt$$

$$\int\left(\frac{A}{y}+\frac{B}{M-y}\right)dy = \int k\,dt$$ $A = \frac{1}{M}$, $B = \frac{1}{M}$

$$\frac{1}{M}\left(\ln y - \ln(M-y)\right) = kt + C$$

$$\ln\left(\frac{y}{M-y}\right) = Mkt + \underbrace{MC}_{=D}$$

Räknar i hundratal $y(0)=1$ ger $D=\ln\left(\frac{1}{M-1}\right)$

$y(2)=8$ ger $\ln\left(\frac{8}{M-8}\right)=2Mk+\ln\left(\frac{1}{M-1}\right)$

$y(4)=32$ ger $\ln\left(\frac{32}{M-32}\right)=4Mk+\ln\left(\frac{1}{M-1}\right)$

villkor (2) − 2·(villkor(1)) ger

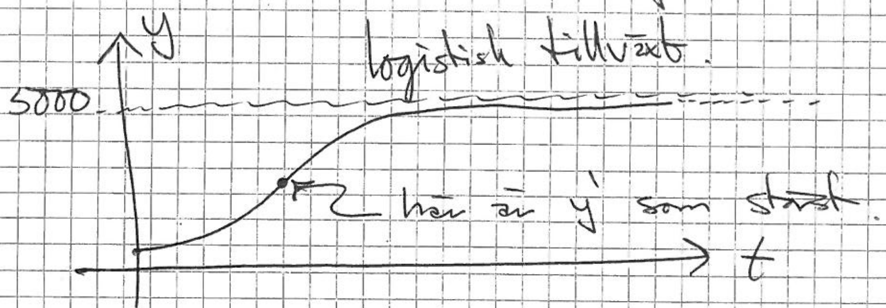
$$\ln\left(\frac{32}{M-32}\right)-2\ln\left(\frac{8}{M-8}\right)=\ln\left(\frac{1}{M-1}\right)-2\ln\left(\frac{1}{M-1}\right)$$

$$\frac{32(M-8)^2}{64(M-32)}=(M-1)$$

$$M^2-16M+\cancel{64}=2M^2-66M+\cancel{64}$$

$$M(M-50)=0 \implies M=50.$$

Svar: $M=5000$ och tillväxthast. som störst när $y=2500$.



9

$\mathbb{X}$ är av typ (3×1).

dvs $\mathbb{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$A\mathbb{X}=\mathbb{B} \iff \begin{cases}x_1+x_3=2\\x_1+x_2=1\\x_1+x_2+x_3=-1\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\1&1&0&1\\1&1&1&-1\end{array}\right)\begin{matrix}-1\\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&-1&-1\\0&1&0&-3\end{array}\right)$$

$$\iff \begin{cases}x_1=4\\x_2=-3\\x_3=-2\end{cases}$$

Svar: $\mathbb{X}=\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}$

10. Bestäm egenvärden.

Bilda sekularekvationen.

S.E. $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 40 & 0 \\ 0{,}1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 0) - 40(-0{,}1\lambda - 0) =$$

Utv. rad 1.

$$= 4\lambda - \lambda^3 = \lambda(4 - \lambda^2) = \lambda(2-\lambda)(2+\lambda) = 0$$

Svar:

egenvärden $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -2$ $\lambda_3 = 2$

Sök egenvektorer hörande till egenvärdet 2.

dvs lös ekv. $(A - \lambda E)\mathbf{X} = \mathbf{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 40 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cancel{A} \\ 20 \\ 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} n_0 = 80t \\ n_1 = 4t \\ n_2 = t, \quad t \in R. \end{cases}$$

Svar: En egenvektor är

$n_0 = 80$
$n_1 = 4$
$n_2 = 1$

kopplad till egenvärdet 2