LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Provkod TEN1
Magnus Berggren

TENTAMEN
Kurskod NMAA17

2016-03-30 kl 8.00-13.00

Hjälpmedel: Endast formelblad (bifogas).
OBS! Uppgifterna är ej ordnade i svårighetsgrad. Maxpoäng=25p
För betyg 3 krävs minst 9p, för betyg 4 minst 15p och för betyg 5 minst 20p.

---

1. Lös ekvationerna

a) $3\lg 2 + \lg x = \lg 32$ (1p)

b) $2^{x+2} + 5 \cdot 2^x = 36$ (1p)

c) $\cos 3x = -1$ (1p)

2. Många förlopp, t ex radioaktivt sönderfall, brukar beskrivas av ett exponentiellt avtagande av formen $y = Ae^{-kt}$ där A och k är positiva konstanter och t är tiden. I dessa sammanhang talar man ofta om halveringstiden dvs den tid det tar för funktionen att avta från begynnelsevärdet till halva detta värde. Betrakta funktionen $y = 20e^{-3t}$. Vilken halveringstid har denna funktion? (2p)

3. En hotad arts minskning i antal beskrivs av följande differentialekvation

$$N'(t) = -kN(t) \quad , \quad N(0) = 2000 \quad , \quad N(4) = 1200$$

Lös differentialekvationen. Hur stor är populationen efter 8 år (tiden t=8)?
Hur många år tar det för populationen att minska till 2% av ursprungsantalet?

(3p)

4. I ett metabolt experiment gäller att massan $m(t)$ av glukos avtog med tiden på ett sätt som väl kunde approximeras med funktionen $m(t) = 4,5 - t^2$ (t i timmar). Bestäm reaktionshastigheten då $t = 2$.

(1p)

5. Beräkna

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ (3p)

6. Antag att $m(t)$ betecknar mängden kvicksilver i gram som läckt ut t timmar efter det att en kemisk anläggning har havererat. Då betecknar $m'(t) = te^{-at}, t \geq 0$ där a är en positiv konstant , antalet gram kvicksilver som läcker ut per timme t timmar efter olyckan. Hur mycket kvicksilver rinner ut totalt?

(2p)

7. a) Beräkna maclaurinpolynomet av ordning 2 till $f(x) = \sin(x + x^2)$ (1p)

b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \ln(1 + x^2)}$ (2p)

8. En population som tillväxer enligt den logistiska modellen har tillväxthastigheten

$$\frac{dN}{dt} = kN(M - N) \text{ där } M = 1000 \text{ och}$$
$$N(0) = 200 \quad , \quad N(3) = 350.$$

Bestäm $N(t)$ och skissa dess graf.

(3p)

9. Bestäm det eller de värden på konstanten a för vilket (vilka) ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 2x - 5y + 4z = 6 \\ x - 4y - z = a \end{cases}$$

är lösbart. Bestäm också motsvarande lösning(ar). (3p)

10. Med avseende på en viss sjukdom betraktar vi en population klassindelad i grupperna friska respektive sjuka individer.
Förhållandet mellan friska och sjuka dag för dag beskrivs av övergångsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Visa att det finns ett startvärde som gör systemet stabilt, och ange förhållandet mellan friska/sjuka då.
Bestäm övergångsmatrisens samtliga egenvärden och tillhörande egenvektorer.

(2p)

Lösningsförslag

1 a. $3\lg 2 + \lg x = \lg 32 \quad , \quad x > 0$

$\lg x = \lg 32 - \lg 8$

$\lg x = \lg \frac{32}{8}$

$\lg x = \lg 4$

Svar: $\underline{\underline{x = 4}}$

1 b. $2^x \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^x = 36.$

Sub. $t = 2^x \quad , \quad t > 0.$

$4t + 5t = 36$

$9t = 36$

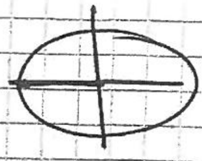
$t = 4$

$\therefore \quad 2^x = 4$

$x = 2.$

Svar: $\underline{\underline{x = 2}}.$

1 c. $\cos 3x = -1$



$$3x = \pi + n2\pi$$

Svar: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{n2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

2. $y = 20e^{-3t}$ $\qquad y(0) = 20$

När är $y = 10$? $\qquad y(T_{1/2}) = 10$

$$10 = 20e^{-3t}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -3t$$

$$t = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-3}$$

Svar: $\underline{\underline{t = \frac{\ln 2}{3}}}$

3. $N'(t) = -kN(t)$

$$N'(t) + kN(t) = 0 \qquad (i.f = e^{kt})$$

$$N'(t)e^{kt} + ke^{kt}N(t) = 0$$

$$(N(t)e^{kt})' = 0$$

$$N(t)e^{kt} = C$$

$$N(t) = Ce^{-kt}$$

$N(0) = 2000$ ger $C = 2000$

forts nr 3. $N(t) = 2000e^{-kt}$

$N(4) = 1200$ ger $1200 = 2000e^{-4k}$

$$k = \frac{\ln\frac{3}{5}}{-4}$$

Svar: $$\underline{\underline{N(t) = 2000e^{t\left(\frac{\ln\frac{3}{5}}{4}\right)}}}$$

$$N(8) = 2000e^{2\ln\frac{3}{5}} = \overset{8\cdot5\cdot10}{\overset{4000}{\cancel{2000}}}\cdot\frac{9}{\cancel{25}_{5}} = \underline{\underline{720}}$$

2% av 2000 = 40

$$40 = 2000e^{t\left(\frac{\ln\frac{3}{5}}{4}\right)}$$

$$\ln\frac{1}{50} = t\,\frac{\ln\frac{3}{5}}{4}$$

$$\underline{\underline{t = \frac{4\ln\frac{1}{50}}{\ln\frac{3}{5}}}}$$ ger $N = 40$.

4. $m(t) = 4{,}5 - t^2$ $\quad m'(t) = -2t$

Svar $\underline{\underline{m'(2)}} = -2 \cdot 2 = \underline{\underline{-4}}$

5. a. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx \underset{p.i}{=} \left[x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx =$

$= \dfrac{\pi}{2} + \left[\cos x \right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\dfrac{\pi}{2} - 1}}$

b. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+4)} dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} \right) dx =$

$\displaystyle= \int_1^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{4}}{x} - \frac{\frac{1}{4}}{x+4} \right) dx = \frac{1}{4} \left[\ln \left| \frac{x}{x+4} \right| \right]_1^{\infty} =$

$= \dfrac{1}{4} \left(\ln 1 - \ln \dfrac{1}{5} \right) = \underline{\underline{\dfrac{\ln 5}{4}}}$

c. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \Big/ \; t = x^2+4 \quad \frac{dt}{dx} = 2x \; \Big/ =$

$= \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \underline{\underline{\sqrt{x^2+4} + C}}$

6. $m_{tot} = \int_0^\infty t e^{-at}\, dt = \left[\frac{e^{-at}}{-a} t \right]_0^\infty -$

p.i. $\to 0$

$\int_0^\infty \frac{e^{-at}}{-a} \cdot 1\, dt = 0 + \frac{1}{a} \left[\frac{e^{-at}}{-a} \right]_0^\infty = 0 + \frac{1}{a^2}$

Svar: $\frac{1}{a^2}$ gram.

7. a) $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \ldots$

$t = x + x^2$

$\sin(x + x^2) = x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$

Svar: $P_2(x) = x + x^2$

b)

$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \ln(1 + x^2)} = \Big/$ Maclaurinutv. $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \ldots$, $t = x^2$ $\Big/$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) \right)}{x \left(x^2 + \mathcal{O}(x^4) \right)} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^3} \left(\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2) \right)}{\cancel{x^3} \left(1 + \mathcal{O}(x^2) \right)} = \frac{1}{6}$

$\mathcal{O}(x^2) \to 0$

8. $\frac{dN}{dt} = kN(M-N)$ Separabel diff. ekv.

$$\int \frac{1}{N(M-N)}\,dN = \int k\,dt$$

$A = \frac{1}{M}$

$$\int \left(\frac{A}{N} + \frac{B}{M-N}\right) dN = \int k\,dt$$

$B = \frac{1}{M}$

$$\frac{1}{M}\left(\ln N - \ln(M-N)\right) = kt + C$$

$$\ln \frac{N}{M-N} = Mkt + MC$$

$N(0) = 200$ ger $MC = \ln \frac{200}{M-200}$

sätt in på MC:s plats.

forts. nr 8.

$N(3) = 350$ ger

$$\ln\left(\frac{350}{M-350}\right) = Mk\cdot 3 + \ln\left(\frac{200}{M-200}\right)$$

$M = 1000$.

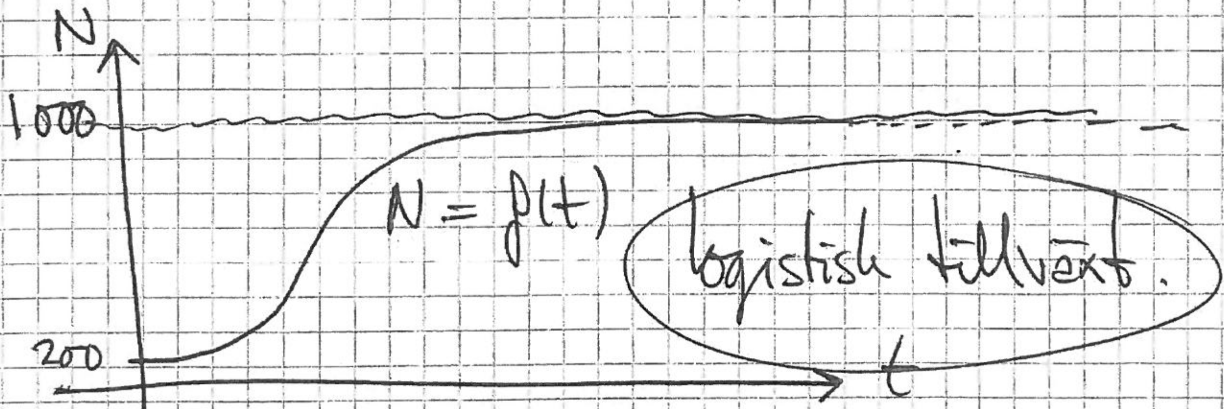
således

$$k = \frac{\ln\left(\frac{350}{650}\right) - \ln\left(\frac{200}{800}\right)}{3000}$$

löser till sist ut N.

$$\frac{N}{M-N} = e^{Mkt}\cdot e^{MC}$$

$$N(t) = \frac{Me^{Mkt}\cdot e^{MC}}{1+e^{Mkt}\cdot e^{MC}} \to M \text{ då } t\to\infty.$$



9.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & -1 & a \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \quad -1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & a-3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right)$$

Syst. lösbart $\Longleftrightarrow$ $a=3$.

Svar: $\begin{cases} x = 3-7t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

parameterlösning.

10.

Stud. $A\mathbb{X} = \lambda \mathbb{X}$

där $A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ = övergångsmatrisen.

$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} f_n \\ s_n \end{pmatrix}$ f_n = antalet friska dag n.

s_n = antalet sjuka dag n.

$\Longleftrightarrow$ $(A-\lambda E)\mathbb{X} = \mathbb{0}$

icke-triviala lösningar finns precis då

$\det(A-\lambda E) = 0$ (sekularekvationen).

$$\begin{vmatrix} 0{,}9-\lambda & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1{,}4\lambda + 0{,}45 - 0{,}05 = 0$$

$$\lambda = 0{,}7 \pm \sqrt{0{,}49 - 0{,}4} = 0{,}7 \pm 0{,}3$$

<u>egenvärden</u> $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 0{,}4$.

$\lambda_1 = 1$ $\begin{pmatrix} -0{,}1 & 0{,}5 & | & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}5 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} f_n = 5t \\ s_n = t \end{matrix}$

Svar: 5 ggr fler friska än sjuka ger stabilitet. <u>egenvektorer</u> till $\lambda_1 = 1$.

$\lambda_2 = 0{,}4$ $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & | & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} f_n = p \\ s_n = -p \end{matrix}$

<u>egenvektorer</u> till $\lambda_2 = 0{,}4$.