Potenser

a och $b > 0$, x och $y \in R$

$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a$ (n faktorer) om $n \in N$

$a^0 = 1$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

Logaritmer

a och $y > 0$, $a \neq 1$

$y = 10^x \Leftrightarrow x = {}^{10}\log y = \lg y$

$y = a^x \Leftrightarrow x = {}^{a}\log y$

$a = e$ ger

$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

Logaritmlagar

y_1 och $y_2 > 0$, a och $c > 0$, a och $c \neq 1$

${}^{c}\log y_1 + {}^{c}\log y_2 = {}^{c}\log y_1 \cdot y_2$

${}^{c}\log y_1 - {}^{c}\log y_2 = {}^{c}\log \frac{y_1}{y_2}$

${}^{c}\log y_1{}^{p} = p \cdot {}^{c}\log y_1$

${}^{a}\log y_1 = \frac{{}^{c}\log y_1}{{}^{c}\log a}$

Talföljder och serier

Aritmetisk talföljd och summa

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$ där

$a_n = a_1 + (n-1)d$ och $d = a_n - a_{n-1}$

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

Geometrisk talföljd och summa

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$ där

$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$ och $k = a_n / a_{n-1}$

$s_n = a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \ldots + a_1 k^{n-1} = \frac{a_1(1-k^n)}{1-k}$, om $k \neq 1$

$s_n = n a_1$, om $k = 1$

Konvergent geometrisk serie

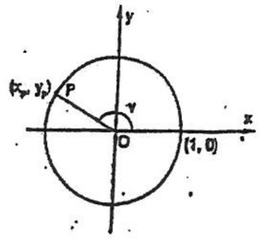
$s = a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \ldots = \frac{a_1}{1-k}$, där $-1 < k < 1$

Trigonometri

$\sin v = y_p$

$\cos v = x_p$

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$



Formler

Enkla samband

$\sin(180° - u) = \sin u$

$\cos(180° - u) = -\cos u$

$\tan(180° - u) = -\tan u$

$\sin(90° - u) = \cos u$

$\cos(90° - u) = \sin u$

$\tan(90° - u) = \cot u = 1/\tan$

$\sin(-u) = -\sin u$

$\cos(-u) = \cos u$

$\tan(-u) = -\tan u$

Trigonometriska ettan

$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$

Additionssatserna

$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$

$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$

$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$

$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$

Formler för dubbla vinkeln

$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$

$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u =$

$= 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u$

$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$

Formler för halva vinkeln

$\sin^2 \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{2}$

$\cos^2 \frac{u}{2} = \frac{1 + \cos u}{2}$

Några exakta trigonometriska funktionsvärden

Vinkel		sin v	cos v
Grader	Radianer		
0°	0	0	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0

NÅGRA STANDARDGRÄNSVÄRDEN

Talföljder (n = naturligt tal)

Då $n \to \infty$ gäller att	$\sqrt[n]{a} \to 1$	$a > 0$ konstant
	$\sqrt[n]{n} \to 1$	
	$\frac{n^c}{a^n} \to 0$	$a > 1$ och c konstanter
	$\frac{a^n}{n!} \to 0$	a konstant
	$(1 + \frac{1}{n})^n \to e$	

Funktioner från R till R

Då $x \to +\infty$ gäller att	$\frac{x^\alpha}{a^x} \to 0$	$a > 1$ och α konstanter
	$\frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0$	$\alpha > 0$ konstant
Då $x \to 0$ gäller att	$x^\alpha \ln x \to 0$	$\alpha > 0$ konstant , $x > 0$
	$\frac{\sin x}{x} \to 1$	
	$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$	
	$\frac{e^x - 1}{x} \to 1$	

Deriveringsregler

Funktion	Derivata
x^a, a reellt tal	$a\,x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$a^x,\ a>0$	$a^x \ln a$
$\ln x,\ x>0$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x,\ x>0$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$

Funktion	Derivata
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},-1<x<1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Kedjeregeln

Om $y = F(x)$ är sammansatt av funktionerna $y = f(u)$ och $u = g(x)$, dvs $y = f(g(x))$, så är

$F'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$ (kedjeregeln).

$F'(x) =$ "yttre derivatan × inre derivatan".

Produkt

Om $F(x) = u(x) \cdot v(x)$, så är

$F'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$

Kvot

Om $F(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, så är

$$F'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Integraler

Primitiv funktion

$F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ om $F'(x) = f(x)$ för alla x.

Funktion $f(x)$	Samtliga primitiva funktioner $F(x)$
$x^a,\ a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\sin kx$	$-\frac{\cos kx}{k} + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\cos kx$	$\frac{\sin kx}{k} + C$

Funktion $f(x)$	Samtliga primitiva funktioner $F(x)$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$
$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
e^x	$e^x + C$
e^{kx}	$\frac{e^{kx}}{k} + C$
$a^x = e^{x \ln a}$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\ln x$	$x \ln x - x + C$

Partiell integration

$$\int (f(x) \cdot g(x))\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int (F(x) \cdot g'(x))\, dx$$

(Taylorutvecklingar av elementära funktioner)

För alla x i respektive funktioners definitionsområden gäller

(i) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$

(ii) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \cos \theta x \cdot \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$

(iii) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \cos \theta x \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(iv) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{(1+\theta x)} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(v) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + (-1)^k \frac{1}{1+(\theta x)^2} \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}$

(vi) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n +$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} \cdot x^{n+1}$$

I samtliga fall är θ ett tal sådant att $0 \le \theta \le 1$ som beror på x och n respektive k.