LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Provkod TEN1
Magnus Berggren

TENTAMEN
Kurskod NMAA17

2017-01-11 kl 8.00-13.00

Hjälpmedel: Endast formelblad (bifogas).
OBS! Uppgifterna är ej ordnade i svårighetsgrad. Maxpoäng=25p
För betyg 3 krävs minst 9p, för betyg 4 minst 15p och för betyg 5 minst 20p.

---

1. Lös ekvationerna

a) $$\frac{\ln(4x^2+7)}{\ln(2x+1)} = 2$$ (1p)

b) $$\ln(3^x + 3^{x+1}) = 0$$ (1p)

c) $$\sin x = \frac{1}{2}$$ (1p)

2. En populations tillväxt beskrivs av följande differentialekvation

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}2N \quad , \quad N(0) = 20$$

Lös differentialekvationen. Hur lång tid tar det för populationen att växa till en storlek av 5000 individer ?

(2p)

3. Visa att om $C(t) = (1+kt)^{-1/2}$ så gäller att kemiska reaktionen är av tredje ordningen , dvs att reaktionshastigheten $C'(t)$ är direkt proportionell mot C^3. Vid vilken tidpunkt har reaktionshastigheten minskat till hälften av den ursprungliga ?

(2p)

4. Antag att en populations storlek p vid tiden t ges av sambandet

$$p(t) = \frac{1000(4+t)}{(9+t^2)} \quad , \quad t \geq 0$$

När är populationen som störst och hur många individer innehåller den då ?

(2p)

5. Beräkna

a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-2x}dx$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+4x+3}dx$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{2}{3^k}$ (3p)

6. Antag att en omättlig och outtröttlig apa har försökt knäcka nötter i t timmar och lyckats x gånger. Knäckhastigheten (antalet knäckta nötter per timme) ges av

$$x'(t) = 5(1-e^{-t/30}) \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad x(0) = 0$$

Hur många nötter är färdigknäckta efter de första 30 timmarna ? (2p)

7. a) Bestäm maclaurinpolynomet av grad 3 till $f(x) = x\cos x$ (1p)

b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2}$ (1p)

c) Antag att en människa varje dag tillför kroppen en dos d av ett gift och att kroppen varje dag eliminerar p% av den mängd gift som finns i kroppen. Ange en formel som anger den mängd gift individen har i kroppen efter n dagar. Vad händer då $n \to \infty$?

(1p)

8. I ett land med 9 miljoner invånare , som är likformigt fördelade utbryter en epedemi. Vid tiden t har y(t) personer drabbats och alla drabbade har samma förmåga att i sin tur smitta andra personer. Antag att 8000 personer drabbats vid tiden t=0 och 80 000 vid tiden t=1. Hur många har fått sjukdomen vid tiden t=3 (t kan t.ex vara uttryckt i månader). Antag att antalet människor som föds eller dör under denna tid är försumbar. Utgå ifrån följande modell

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y) \quad \text{där} \quad M\text{=9 miljoner} \quad .$$ (3p)

9. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$(1 + x^4)y' - 4x^3y = 0$$

som uppfyller villkoret $y(1) = 1$

(2p)

10. Lös följande ekvationssystem

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$ (1p)

11. Med avseende på en viss sjukdom betraktar vi en population klassindelad i grupperna friska respektive sjuka individer.
Förhållandet mellan friska och sjuka dag för dag beskrivs av övergångsmatrisen

$$A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Visa att det finns ett startvärde som gör systemet stabilt, och ange förhållandet mellan friska/sjuka då.
Bestäm övergångsmatrisens samtliga egenvärden och tillhörande egenvektorer.

(2p)

Kortfattade lösningsförslag T-2017-01-11.

1 a.

$$\frac{\ln(4x^2+7)}{\ln(2x+1)} = 2 \quad , \quad x > -\frac{1}{2}, \; x \neq 0.$$

$$\ln(4x^2+7) = 2\ln(2x+1)$$

$$4x^2+7 = (2x+1)^2$$

$$\cancel{4x^2}+7 = \cancel{4x^2}+4x+1$$

$$6 = 4x$$

Svar: $x = \frac{3}{2}$

b.

$$\cancel{e^{\ln}}(3^x+3^{x+1}) = e^0$$

$$3^x + 3\cdot 3^x = 1$$

$$4\cdot 3^x = 1$$

$$3^x = \frac{1}{4}$$

$$\ln 3^x = \ln\frac{1}{4}$$

$$x\ln 3 = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 4$$

Svar: $x = -\frac{\ln 4}{\ln 3}$

c. $\sin x = \frac{1}{2} \iff$ Svar: $x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + n2\pi \\ \frac{5\pi}{6} + n2\pi \end{cases}, \; n \in \mathbb{Z}.$

2.

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}2N$$

$$\int \frac{1}{N}\,dN = \int 0{,}2\,dt$$

$$\ln N = 0{,}2t + C$$

$$N = e^{0{,}2t+C} = e^{0{,}2t}\cdot \underbrace{e^C}_{=D}$$

$$N(t) = De^{0{,}2t}$$

$N(0) = 20$ ger $D = 20$.

$$N(t) = 20e^{0{,}2t}$$

När är $N = 5000$?

$$5000 = 20e^{0{,}2t}$$

$$250 = e^{0{,}2t}$$

$$\ln 250 = 0{,}2t$$

$$t = \frac{\ln(250)}{0{,}2}$$

Svar: $\begin{cases} N(t) = 20e^{0{,}2t} \\ t = 5\ln 250 \text{ ger } N = 5000. \end{cases}$

3.

$$c(t) = (1+kt)^{-1/2}$$

$$c'(t) = -\frac{1}{2}(1+kt)^{-\frac{3}{2}} \cdot k$$

$$c'(t) = -\frac{k}{2}\left((1+kt)^{-1/2}\right)^3 = -\frac{k}{2}(c(t))^3$$

V.S.V.

$$c'(0) = -\frac{k}{2}$$

När är $c' = -\frac{k}{4}$?

$$-\frac{\cancel{k}}{2}(1+kt)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{\cancel{k}}{4}$$

$$(1+kt)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$(1+kt)^{\frac{3}{2}} = 2$$

$$\left((1+kt)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$1+kt = 2^{2/3}$$

$$t = \frac{2^{\frac{2}{3}}-1}{k}$$

Svar: $t = \frac{2^{2/3}-1}{k}$

4.

$$p(t) = 1000\,\frac{4+t}{9+t^2}, \quad t \geq 0$$

$$p'(t) = 1000\,\frac{1 \cdot (9+t^2) - 2t(4+t)}{(9+t^2)^2} =$$

$$= \frac{1000(9-8t-t^2)}{(9+t^2)^2} = \frac{1000(t-1)(-t-9)}{(9+t^2)^2}$$

t	0		1	
$p'(t)$		+	0	−
$p(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

$$P_{max} = p(1) = 1000 \cdot \frac{5}{10} = 500$$

Svar: $t=1$ ger P_{max}

$P_{max} = 500$.

---

5 a.

$$\int_0^\infty x e^{-2x}\,dx \underset{\text{p.i}}{=} \left[\frac{e^{-2x}}{-2}x\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{-2}\,dx =$$

$\longrightarrow 0$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

5 b. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx =$ PBU.

$$= \int_1^{\infty}\left(\frac{A=\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{B=-\frac{1}{2}}{x+3}\right)dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|\right]_1^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln\frac{2}{4}\Big) = \frac{1}{2}\ln 2$$

5 c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3^k} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k} = \Big/ \text{Geometrisk serie} \Big/ =$

$$= 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots\right) = 2\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2\cdot\frac{3}{2} = 3$$

6. $x'(t) = 5\left(1-e^{-\frac{t}{30}}\right)$

$$x(t) = \int 5\left(1-e^{-\frac{t}{30}}\right)dt = 5\left(t - \frac{e^{-\frac{t}{30}}}{-\frac{1}{30}}\right) + C$$

$x(0)=0$ ger $5(0+30\underbrace{e^{0}}_{=1}) + C = 0$

$$C = -150.$$

Svar: $x(30) = 5\left(30+30e^{-1}\right) - 150 = \dfrac{150}{e}$ st

7. a. $f(x) = x\cos x = x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\mathcal{O}(x^4)\right) =$

$$x - \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^5).$$

Svar: $P_3(x) = x - \dfrac{x^3}{2}$

b. $$\lim_{x\to 0} \frac{1+x+\frac{x^2}{2!} - \left(1-\frac{x^2}{2!}\right) - x + \mathcal{O}(x^3)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\mathcal{O}(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\Big(1+\underbrace{\mathcal{O}(x)}_{\to 0}\Big) = 1$$

c. $$S_n = d + d\left(1-\frac{P}{100}\right) + \dots + d\left(1-\frac{P}{100}\right)^n$$

$$S_n = d\,\frac{1-\overbrace{\left(1-\frac{P}{100}\right)^{n+1}}^{\to 0 \text{ då } n\to\infty}}{1-\left(1-\frac{P}{100}\right)}$$

$$S_{\infty} = \frac{100d}{P}$$

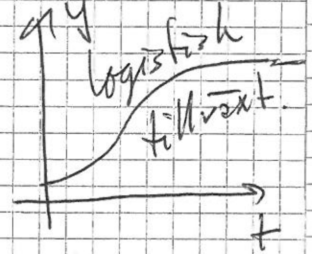
8. $\frac{dy}{dt} = ky(M-y)$ Separabel diff. ekv.

$\int \frac{1}{y(M-y)}\,dy = \int k\,dt$

PBU

$A = \frac{1}{M}$

$\int \left(\frac{A}{y} + \frac{B}{M-y}\right) dy = \int k\,dt$ $B = \frac{1}{M}$



$\frac{1}{M} \ln\left|\frac{y}{M-y}\right| = kt + C$

$\ln\left|\frac{y}{M-y}\right| = Mkt + \underbrace{MC}_{=D}$

$y(0) = 8000$ ger $\ln\left|\frac{8000}{M-8000}\right| = D$

$y(1) = 80\,000$ ger $\ln\left|\frac{80\,000}{M-80\,000}\right| = Mk + D$

$\Rightarrow Mk = \ln\left|\frac{80\,000}{M-80\,000}\right| - D$

till sist lös ut y. sätt $t = 3$.

$\frac{y}{M-y} = e^{D} \cdot e^{Mkt} \iff y = \frac{Me^{D+Mkt}}{1+e^{D+Mkt}}$

Svar: $y(3) = \frac{Me^{D+3Mk}}{1+e^{D+3Mk}}$

9. $(1+x^4)y' = 4x^3 y$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx$

$\ln y = \ln(1+x^4) + C$

$y(1) = 1$ ger $\underbrace{\ln 1}_{=0} = \ln 2 + C$

$C = -\ln 2$

$\ln y = \ln(1+x^4) - \ln 2$

$\ln y = \ln\left(\frac{1+x^4}{2}\right)$

Svar: $y = \frac{1+x^4}{2}$

10. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ -2 -1 $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{array}\right)$ -3 $\sim$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$ orimlighet.

Svar: lösning saknas.

11. S.E. $\begin{vmatrix} 0,4-\lambda & 0,2 \\ 0,6 & 0,8-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 0,32 - 1,2\lambda + \lambda^2 - 0,12 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1,2\lambda + 0,20 = 0$

$\lambda = 0,6 \pm \sqrt{0,36 - 0,20}$ egenvärden

$\lambda = 0,6 \pm \sqrt{0,16}$ $\quad \lambda_1 = 1$

$\lambda = 0,6 \pm 0,4.$ $\quad \lambda_2 = 0,2$

Egenvektorer hörande till egenvärdet 1.

$\left(\begin{array}{cc|c} -0,6 & 0,2 & 0 \\ \cancel{0,6} & \cancel{-0,2} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow -0,6 f_n + 0,2 s_n = 0$

$\begin{cases} f_n = t \\ s_n = 3t \end{cases}$ egenvektorer

3 ggr fler sjuka än friska.

kontroll: $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40+60 \\ 60+240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$

stämmer.

Till sist. $\lambda_2 = 0,2$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0,2 & 0,2 & 0 \\ \cancel{0,6} & \cancel{0,6} & \cancel{0} \end{array}\right)$ $\quad \begin{matrix} f_n = t \\ s_n = -t \end{matrix}$ egenvektorer hörande till egenvärdet 0,2.

$t \in R.$