LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Provkod TEN1
Magnus Berggren

TENTAMEN
Kurskod NMAA17

2017-04-19 kl 8.00-13.00

Hjälpmedel: Endast formelblad (bifogas).
**OBS! Uppgifterna är ej ordnade i svårighetsgrad.** Maxpoäng=25p
För betyg 3 krävs minst 9p, för betyg 4 minst 15p och för betyg 5 minst 20p.

---

1. Lös ekvationerna

a) $\ln x^2 + \ln(2x) + 2 = \ln 2$ (1p)

b) $2^{x+2} + 5 \cdot 2^x = 36$ (1p)

c) $\sin\frac{x}{2} = -1$ (1p)

2. En biolog studerade noggrant tillväxten för en valunge och fann att vikten y kg under det första levnadsåret kunde beskrivas med differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}41y$$

där t är tiden i månader. På ettårsdagen vägde valen 5900 kg. Vad vägde den som nyfödd ?

(2p)

3. Visa att funktionen $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x^2}$ har ett minimivärde för $x > 0$ och beräkna detta minimivärde. (2p)

4. En talgoxe lägger x ägg. Antag att antalet flygga ungar N är en funktion av antalet lagda ägg enligt följande $N(x) = xe^{-0,2x}$ , $x \geq 0$.
Vilket äggantal ger flest flygga ungar ? (2p)

5. Bestäm

a) $\int x\sin 2x dx$ b) $\int x\sqrt{3-x^2}\,dx$ c) $\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx$ (3p)

6. Vid ett kemiskt experiment har man funnit att den hastighet varmed gas strömmar upp genom ett provrör är omvänt proportionell mot den tid , t minuter, som försöket varit i gång. En viss mängd , M liter, strömmar upp från t=5 till t=25. Bestäm konstanten a så att samma mängd M strömmar upp från t=25 till t=a.

(2p)

7.

a) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ (2p)

b) Vi har den geometriska serien
$1 + (2-x) + (2-x)^2 + (2-x)^3 + \ldots\ldots$
För vilka x är serien konvergent ?
För vilka värden på x är seriens summa 4 ? (1p)

8. En kvinna kommer till en öde ö. Hon har kapacitet att klona sig själv genom någon kommersiellt okänd teknik. Ön har naturtillgångar som räcker till 100 personer.

om y(t)=antalet genetiskt identiska kvinnor vid tidpunkten t så är

$$\frac{dy}{dt} = ky(100 - y) \quad , \quad y(0) = 1.$$

Lös differentialekvationen. Ditt svar kommer att innehålla konstanten k. Vilken information behövs för att bestämma den ?

Vid vilket kvinnoantal är tillväxttakten som störst ? ( motivera! )

(3p)

9.

Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' - \frac{2}{x+1}y = 0 \quad , x > -1$$

som uppfyller villkoret $y(0) = e$.

(2p)

10.

Lös följande ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$ (1p)

11.

Med avseende på en viss sjukdom betraktar vi en population klassindelad i grupperna friska respektive sjuka individer.
Förhållandet mellan friska och sjuka beskrivs av övergångsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Bestäm alla egenvärden till matrisen A.
Finns det något startvärde som gör populationen stabil ? (2p)

Kortfattede løsningsforslag.

1 a. $\ln x^2 + \ln(2x) + 2 = \ln 2$

$2\ln x + \cancel{\ln 2} + \ln x + 2 = \cancel{\ln 2}$

$3\ln x = -2$

$\ln x = -\frac{2}{3} \underset{x>0}{\iff} x = e^{-2/3}$

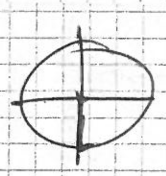
b. $2^{x+2} + 5\cdot 2^x = 36$

$2^x \cdot 2^2 + 5\cdot 2^x = 36$

$9\cdot 2^x = 36$

$2^x = 4 \iff x = 2.$

c. $\sin\frac{x}{2} = -1$



$\iff \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} + n2\pi$

$\iff x = 3\pi + n4\pi$ , n heltal.

2. $\frac{dy}{dt} = 0{,}41y \iff y = Ce^{0{,}41t}$

diff. elv.

$y(12) = 5900$ gir $5900 = Ce^{0{,}41\cdot 12}$

$C = \frac{5900}{e^{4{,}92}}$

$y(0) = C$ Svar: $\frac{5900}{e^{4{,}92}}$ kg.

3. $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x^2}$ , $x > 0$

$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$

$f'(x) = 0 \iff x = 2$

| x | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

$f_{min} = f(2) = 2 - 2 + \frac{4}{2^2} = 1$

Svar: $f_{min} = 1$.

4. $N(x) = xe^{-0{,}2x}$ , $x \geq 0$

Sök det x som ger $N_{max}$.

$N'(x) = 1 \cdot e^{-0{,}2x} - 0{,}2x\, e^{-0{,}2x} =$

$\underbrace{e^{-0{,}2x}}_{>0}(1 - 0{,}2x) = 0 \Rightarrow x = 5$.

| $x$ | 0 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|
| $N'(x)$ | | + | 0 | − |
| $N(x)$ | | ↗ | | ↘ |

Svar: $x = 5$.

5. a. $\int x \sin 2x\, dx = \frac{-x\cos 2x}{2} - \int \frac{-\cos 2x}{2} dx =$ p.i

$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{\sin 2x}{4} + C$

b. $\int x\sqrt{3-x^2}\, dx = \Big/ \begin{matrix} t = 3 - x^2 \\ dt = -2x\,dx \end{matrix} \Big/ =$

$= -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(3-x^2)^{3/2} + C$

c. $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx =$

$= \int \left( \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$

6. $M'(t) = \frac{k}{t}$

$\int_5^{25} \frac{k}{t} dt = \int_{25}^{a} \frac{k}{t} dt$ Bestäm a.

$\cancel{k}(\ln 25 - \ln 5) = \cancel{k}(\ln a - \ln 25)$

$\ln \frac{25}{5} + \ln 25 = \ln a$

$\ln(5 \cdot 25) = \ln a$

$\ln(125) = \ln a$

$a = 125$.

Svar: $a = 125$

7. a

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\mathcal{O}(x^5)\right)}{x\left(x+\mathcal{O}(x^3)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^5)}{x^2+\mathcal{O}(x^4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left(\overset{\to 0}{\frac{1}{6}x}+\overset{\to 0}{\mathcal{O}(x^3)}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\underset{\to 0}{\mathcal{O}(x^2)}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

b  kvoten $= 2-x$

konv. $\Leftrightarrow |2-x|<1 \Leftrightarrow -1<2-x<1$

$\Leftrightarrow 1<x<3$

$$S=\frac{1}{1-(2-x)}=4 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}=4$$

$\Leftrightarrow 4x-4=1 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$.

---

8.

$$\frac{dy}{dt}=ky(100-y)$$

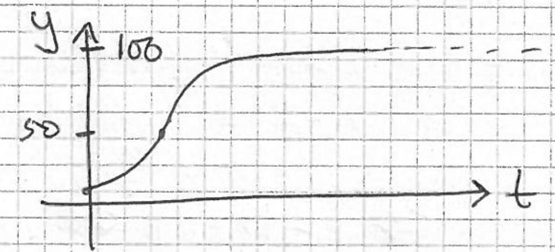
$$\int\frac{1}{y(100-y)}\,dy=\int k\,dt$$

$$\int\left(\frac{\frac{1}{100}}{y}+\frac{\frac{1}{100}}{100-y}\right)dy=\int k\,dt$$

$$\ln y-\ln(100-y)=100(kt+c)$$

$y(0)=1$ ger $c=\frac{1}{100}(-\ln 99)$

ger




ett villkor till behövs för att bestämma k.

$y'_{max}$ inträffar då $y=50$.

Motivering. Bilda. $y'=g(y)=k(100y-y^2)=$

$=k\left(-(y-50)^2+50^2\right)$

9.

$$y' - \frac{2}{x+1}y = 0 \quad , \; x > -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x+1}y$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2}{x+1}\,dx$$

$$\ln y = 2\ln(x+1) + C$$

$$y(0) = e \quad \text{ger} \quad \underbrace{\ln e}_{=1} = \underbrace{2\ln(0+1)}_{=0} + C$$

$$C = 1$$

$$\ln y = 2\ln(x+1) + 1$$

$$y = e^{2\ln(x+1)+1} = e(x+1)^2$$

Svar: $y = e(x+1)^2$.

10.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \quad -1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & -6 & 3 & -21 \\ 0 & -1 & 3 & -6 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

ger $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$

---

11. S.E. $\begin{vmatrix} 0{,}6-\lambda & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$

$$\lambda^2 - 1{,}2\lambda + 0{,}36 - 0{,}16 = 0 \iff$$

$$\lambda^2 - 1{,}2\lambda + 0{,}2 = 0 \iff \lambda = 0{,}6 \pm \sqrt{0{,}6^2 - 0{,}2}$$

$$\iff \lambda = 0{,}6 \pm 0{,}4 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0{,}2. \end{cases}$$

egenvärden.

stabil då $\lambda = 1$. ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f = t \\ s = t \end{cases}, \; t \in R$$

lika många friska resp. sjuka gör systemet "stabilt".

test: $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60+40 \\ 40+60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$