LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Provkod TEN1
Magnus Berggren

TENTAMEN
Kurskod NMAA17

2018-01-13 kl 8-13

Hjälpmedel: Endast formelblad (bifogas).
OBS! Uppgifterna är ej ordnade i svårighetsgrad. Maxpoäng=25p
För betyg 3 krävs minst 9p, för betyg 4 minst 15p och för betyg 5 minst 20p.

---

1. Lös ekvationerna

a) $\ln x + \ln(x+1) = \ln(x+3)$ (1p)

b) $2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3^{x+1} = 5$ (1p)

c) $\cos x = -\frac{1}{2}$ (1p)

2. Antalet bakterier i en bakteriekoloni är vid tiden t lika med $N(t) = Ca^t$ där t mäts i minuter. Kolonin fördubblas på 10 minuter och antalet bakterier vid tiden $t = 0$ är 200.
Efter hur många minuter är antalet bakterier lika med 10 000 ? (2p)

3. Antalet arter N i ett naturreservat minskar, pga artutdöende, enligt följande differerentialekvation

$$\frac{dN}{dt} = -kN \quad , \quad k = 0.07 \quad \text{(utdöendekoefficient)}$$

$N(0) = 400$ (antalet arter då reservatet bildades)

Lös differentialekvationen. Hur många arter finns kvar 10 år efter det att reservatet bildades ? Hur lång tid tar det för artantalet att halveras? (3p)

4. Skissera grafen till funktionen $f(x) = xe^{-x}, x \geq 0$. Bestäm sedan arean av det område som ligger mellan kurvan $y = f(x)$ och x-axeln. (2p)

5. Bestäm konstanten k så att kurvan $y = \ln x - 2\ln(x+k)$ tangerar linjen $y = 1$.
(2p)

6. Bestäm en primitiv funktion till följande funktioner

a) $x \ln x$ (1p) b) $\dfrac{4}{x^2 - 2x - 3}$ (1p)

7. a) Beräkna maclaurinpolynomet av ordning 3 för $f(x) = x\cos 2x$ (1p)

b) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$ (1p)

c) Beräkna $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{3^k}$ (1p)

8. En population som tillväxer enligt den logistiska modellen har tillväxthastigheten

$$\frac{dN}{dt} = kN(M - N) \quad \text{där} \quad M = 8000 \quad \text{och}$$
$$N(0) = 100 \quad , \quad N(2) = 4000.$$

Bestäm $N(t)$ och skissa dess graf. Vid vilken populationsstorlek , N , växer populationen som snabbast ?

(3p)

9. Lös matrisekvationen

$$AX = 2A + B \quad , \text{ där } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2p)

10. En population bestående av tre åldersklasser (n_0, n_1, n_2) har följande demografiska egenskaper:

$$F_0 = 0 \, , F_1 = 45 \, , F_2 = 0 \, , P_0 = 0{,}2 \, , P_1 = 0{,}5 \, , P_2 = 0$$

F_i anger antalet avkommor som en individ i åldersklass (i) får och P_i anger sannolikheten att en individ i åldersklass (i) överlever och går in i nästa åldersklass.

Matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ beskriver populationens förändring från tiden t till t+1.

Bestäm alla egenvärden till matrisen.
Bestäm också en egenvektor som är kopplad till det största egenvärdet. (3p)

Lösningar

1 a. $e^{\ln(x(x+1))} = e^{\ln(x+3)}$, $x > 0$

$x^2 + x = x + 3$

$x = (\pm)\sqrt{3}$ Svar: $x = \sqrt{3}$

b. $2 \cdot \frac{1}{3^x} + 3^x \cdot 3 = 5$, Sub $t = 3^x$, $t > 0$

$\frac{2}{t} + 3t = 5$

$2 + 3t^2 = 5t$

$3t^2 - 5t + 2 = 0$

$(t-1)(3t-2) = 0$

$t_1 = 1$, $t_2 = \frac{2}{3}$

fall 1. $3^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$

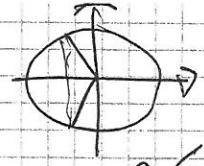
fall 2. $3^x = \frac{2}{3}$

$x \ln 3 = \ln \frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{\ln \frac{2}{3}}{\ln 3}$

Svar: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 3} \end{cases}$

1 c. $\cos x = -\frac{1}{2}$



$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. $N(0) = C = 200$

$400 = 200a^{10}$

$2 = a^{10} \Rightarrow a = 2^{\frac{1}{10}}$

När är $N = 10\,000$?

$10\,000 = 200\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^t$

$50 = 2^{\frac{t}{10}}$

$\ln 50 = \frac{t}{10} \ln 2$

Svar: $t = \frac{10 \ln 50}{\ln 2}$ min.

3. $\frac{dN}{dt} = -kN$

$\int \frac{1}{N} dN = \int -k\, dt$

$\ln N = -kt + C$

forts nr 3.

$$e^{\ln N} = e^{-kt+C}$$

$$N = e^{-kt} \cdot \underbrace{e^{C}}_{=D} = De^{-kt}$$

$$D = 400 \quad , \quad k = 0{,}07$$

$$N(t) = 400e^{-0{,}07t}$$

$$N(10) = 400e^{-0{,}7} \text{ st.}$$

halvering? $\quad 200 = 400e^{-0{,}07t}$

$$\ln\frac{1}{2} = -0{,}07t$$

Svar: $\quad t = \dfrac{\ln 2}{0{,}07}$ år.

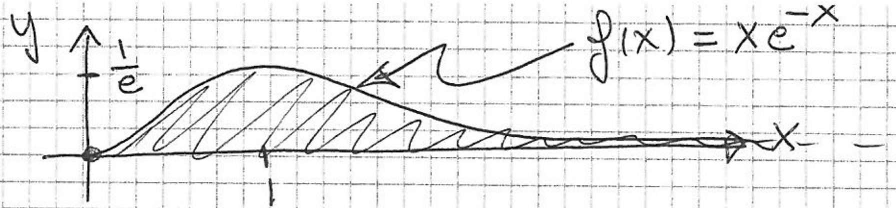
4. $\quad f(x) = xe^{-x} \quad , \quad x \geq 0$.

$$f'(x) = e^{-x} + xe^{-x}\cdot(-1) = (1-x)\underbrace{e^{-x}}_{>0}$$

x		0		1	
$f'(x)$			+	0	−
$f(x)$			↗	e^{-1}	↘

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$f(0) = 0$$



$$\text{Arean} = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx \underset{p.i.}{=} \underbrace{\left[-xe^{-x}\right]_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty e^{-x}dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 0 + 1 = 1$$

5. $\quad y = \ln x - 2\ln(x+k) \quad , \quad x > 0$

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+k} = 0 \; * \quad \underline{\text{tangerar}}$$

linjen $y = 1$ ger $\ln x - 2\ln(x+k) = 1$ **

* ger $\quad x + k = 2x \Rightarrow x = k$

insatt i ** ger

$$\ln k - 2\ln 2k = 1$$

$$\ln\frac{k}{4k^2} = 1$$

$$\frac{1}{4k} = e \Rightarrow k = \frac{1}{4e}$$

6 a. $\int x \ln x \, dx \underset{p.i}{=} \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

b. $\int \frac{4}{x^2-2x-3}\,dx \underset{\text{PBU}}{=} \int \frac{4}{(x+1)(x-3)}\,dx$

$= \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}\right)dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-3}\right)dx$

$= \ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C$

7 a. $f(x) = x\cos 2x = x\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\right) =$

$= x - 2x^3 + \mathcal{O}(x^5)$

$P_3(x) = x - 2x^3$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + x + \mathcal{O}(x^2) \cancel{-1}}{x + \mathcal{O}(x^2)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1 + \underbrace{\mathcal{O}(x)}_{\to 0})}{\cancel{x}(1 + \underbrace{\mathcal{O}(x)}_{\to 0})} = \frac{1}{1} = 1$

7 c. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

Konv. geometrish serie.

8. $\frac{dN}{dt} = kN(M-N)$

$\int \frac{1}{N(M-N)}\,dN = \int k\,dt$

$\int \left(\frac{\frac{1}{M}}{N} + \frac{\frac{1}{M}}{M-N}\right)dN = \int k\,dt$

$\frac{1}{M}\left(\ln N + \frac{\ln(M-N)}{-1}\right) = kt + C$

$\ln\left(\frac{N}{M-N}\right) = Mkt + MC$

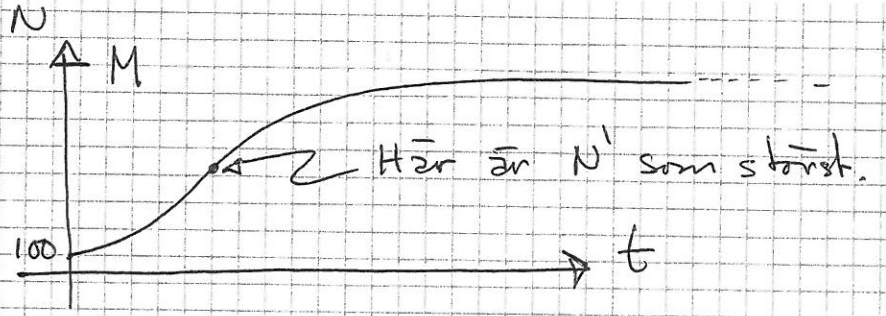
$\frac{N}{M-N} = De^{Mkt}$

$N = \frac{MDe^{Mkt}}{1+De^{Mkt}} \longrightarrow M$ då $t \to \infty$.

$N(0) = 100$ ger D

$N(2) = 4000$ ger k.

forts nr 8.



$$N' = f(N) = -kN^2 + kNM$$

$$f'(N) = -2kN + kM = 0$$

$$\Rightarrow N = \frac{M}{2} \text{ ger } N' \text{ max.}$$

$t = 2$ ger N': max.

9.

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{där} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

Svar: $X = \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$

10. S.E.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 45 & 0 \\ 0,2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,5 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda = \lambda(9 - \lambda^2) = 0$$

Egenvärden. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 3$.

Egenvektorer till egenvärdet $\lambda = 3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 45 & 0 & 0 \\ 0,2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -3 & 0 \end{array}\right) 15 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -3 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} n_0 &= 90t. \\ n_1 &= 6t \\ n_2 &= t \end{aligned}$$

$n_0 = 90$
$n_1 = 6$
$n_2 = 1$

$\bar{n}$ är <u>en</u> egenvektor kopplad till egenvärdet 3.