Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Avd. Tillämpad Matematik
Armen Asratian

SVAR TADI03 2016–06–03

1. Bestäm alla **positiva** heltalslösningar (x, y) till ekvationen:

$$169x + 91y = 3133.$$

Svar: Ekvationen har tre positiva heltalslösningar: $(4, 27)$, $(11, 14)$, $(18, 1)$.

2. Avgör om slutledningen

$$((p \to q) \wedge (\neg r \to \neg q) \wedge (r \to t) \wedge ((t \to (s \vee \neg q))) \to (p \to s)$$

är korrekt.

Lösning: 1) Antag att slutledningen inte är korrekt.
2) Detta innebär att förutsättningarna $p \to q$, $\neg r \to \neg q$, $r \to t$ och $t \to (s \vee \neg q)$ är sanna medan slutsatsen $p \to s$ är falsk.
3) Eftersom $p \to s$ är falsk måste p vara sann och s vara falsk.
4) Eftersom $p \to q$ och p är sanna måste q vara sann.
5) Eftersom q är sann, s är falsk (enligt (3)) och $t \to (s \vee \neg q)$ är sann (enligt (2)) så måste t vara falsk.
6) Eftersom t är falsk och $r \to t$ är sann (enligt (2)) så måste r vara falsk.
7) Eftersom r är falsk och q är sann (enligt (4)) så är $\neg r \to \neg q$ falsk.
Vi ser att antagandet (att slutledningen inte är korrekt) leder till en motsägelse, nämligen att utsagan $\neg r \to \neg q$ är både sann (enligt (2)) och falsk (enligt (7)). Därför är slutledningen korrekt.

Svar: Slutledningen är korrekt.

3. Visa att formeln

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

gäller för alla heltal $n \geq 1$.

Lösning: Formeln gäller för $n = 1$ ty
$VL_1 = \dfrac{1}{(4 \cdot 1 - 3)(4 \cdot 1 + 1)} = \dfrac{1}{5}$, $HL_1 = \dfrac{1}{4 \cdot 1 + 1} = \dfrac{1}{5}$ och $VL_1 = HL_1$.
Antag att formeln gäller för $n = p$ där $p \geq 1$ är ett fixt heltal, dvs att

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{p}{4p+1}$$

Vi visar att formeln gäller även för $n = p + 1$, dvs att

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{p+1}{4(p+1)+1}$$

Vi har att $VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4(p+1)-3)(4(p+1)+1)} =$
$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4p+1)(4p+5)}$ =[enligt antagandet]= $\frac{p}{4p+1} + \frac{1}{(4p+1)(4p+5)} =$
$\frac{p(4p+5)+1}{(4p+1)(4p+5)} = \frac{4p^2+5p+1}{(4p+1)(4p+5)}$.

$HL_{p+1} = \frac{p+1}{4(p+1)+1} = \frac{p+1}{4p+5} = \frac{(p+1)(4p+1)}{(4p+5)(4p+1)} = \frac{4p^2+5p+1}{(4p+1)(4p+5)}$.
Alltså är $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ och formeln gäller för $n = p+1$.
Enligt induktionsprincipen gäller formeln för alla heltal $n \geq 1$.

4. Låt symbolerna $a_1, a_2, ..., a_8$ förekomma med respektive frekvenser

$$w_1 = 3,\ w_2 = 4,\ w_3 = 4,\ w_4 = 5,\ w_5 = 6,\ w_6 = 10,\ w_7 = 11,\ w_8 = 12$$

i ett meddelande M skrivet i alfabetet $A = \{a_1, a_2, ..., a_8\}$.
Med hjälp av Huffmans algoritm hitta en optimal prefixkod $P = \{P(a_1), P(a_2), ..., P(a_8)\}$, d.v.s. en sådan prefixkod P att antalet siffror i koden $P(M)$ är minimalt.
Hur många siffror innehåller följden $P(M)$ för denna optimala prefixkod?

Svar: T.ex. $P(a_1) = 0000, P(a_2) = 0001, P(a_3) = 0100, P(a_4) = 0101,\ P(a_5) = 001,\ P(a_6) = 011,$ $P(a_7) = 10,\ P(a_8) = 11.$
Antalet siffror i följden $P(M)$ för denna optimala prefixkod är
$4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 2 \cdot 11 + 2 \cdot 12 = 158.$

5. a) Bestäm koefficienten framför x^{140} i utvecklingen av $(x^5 + \frac{3}{x})^{100}$.

Svar: $3^{60} \cdot \binom{100}{60}$.

b) Hur många av heltalen från 1 till och med 2000 är delbara med något av talen 3, 5 eller 7?

Svar: $\lfloor \frac{2000}{3} \rfloor + \lfloor \frac{2000}{5} \rfloor + \lfloor \frac{2000}{7} \rfloor - \lfloor \frac{2000}{3 \cdot 5} \rfloor - \lfloor \frac{2000}{3 \cdot 7} \rfloor + \lfloor \frac{2000}{5 \cdot 7} \rfloor - \lfloor \frac{2000}{3 \cdot 5 \cdot 7} \rfloor =$
$666 + 400 + 285 - 133 - 95 - 57 + 19 = 1085.$

6. Hur många **sexsiffriga** positiva heltal kan man bilda av siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7 ?
Observera att varje siffra får användas högst så många gånger som den förekommer bland de givna bokstäverna.

Svar: $7! + 3\binom{6}{4} \cdot \frac{6!}{2!} + 3\binom{5}{2} \cdot \frac{6!}{2!2!} + \frac{6!}{2!2!2!}$

Lösning: Det finns 4 typer sådana tal.
(i) Antalet sexsiffriga tal där alla siffror är olika är lika med $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 7!$.
(ii) Antalet sexsiffriga tal som innehåller precis ett par lika siffror kan beräknas på följande sätt: först väljer vi ett par lika siffror (3 möjligheter), sedan väljer vi 4 olika siffror bland de

resterande siffrorna ($\binom{6}{4}$ möjligheter) och till slut ordnar vi de 6 siffrorna som vi har valt ($\dfrac{6!}{2!}$ möjligheter). Enligt multiplikationsprincipen är totala antalet lika med $3\dbinom{6}{4}\dfrac{6!}{2!}$.

(iii) Antalet sexsiffriga tal som innehåller precis två par lika siffror kan beräknas på följande sätt: först väljer vi två par lika siffror (3 möjligheter), sedan väljer vi 2 olika siffror bland de resterande siffrorna ($\binom{5}{2}$ möjligheter) och till slut ordnar vi de 6 siffrorna som vi har valt ($\dfrac{6!}{2!2!1!1!}$ möjligheter). Enligt multiplikationsprincipen är totala antalet lika med $3\dbinom{5}{2}\dfrac{6!}{2!2!}$.

(iv) Antalet sexsiffriga tal som innehåller tre par lika siffror $5, 5, 6, 6, 7, 7$ är lika med $\dfrac{6!}{2!2!2!}$.

Enligt additionsprincipen är totala antalet sexsiffriga tal som man kan bilda av siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, lika med $7! + 3\dbinom{6}{4} \cdot \dfrac{6!}{2!} + 3\dbinom{5}{2} \cdot \dfrac{6!}{2!2!} + \dfrac{6!}{2!2!2!}$.