Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Avd. Tillämpad Matematik
Armen Asratian

SVAR TADI03 2017–05–30

1a. På hur många olika sätt kan siffrorna $1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4$ ordnas så att två 3:or inte står bredvid

Svar: $\dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!}\dbinom{11}{4}$.

1b. På hur många olika sätt kan talet 30 skrivas som en summa av 2:or och/eller 5:or om man tar hänsyn till den ordning i vilken man summerar ihop 2:orna och 5:orna?
(T.ex. 5+5+5+5+2+2+2+2+2 och 2+2+2+2+2+5+5+5+5 betraktas som olika summor).

Svar: 194 olika sätt.

Lösning: Det finns endast 4 fall för antalet 2:or och 5:or i summan.
Fall 1. Inga 5:or och 15 st 2:or. Summan kan skrivas på endast ett sätt.
Fall 2. Två st 5:or och 10 st 2:or. Vi har 12 siffror i summan. Det finns $\dfrac{12!}{2! \cdot 10!} = 66$ olika sätt att skriva summan.
Fall 3. Fyra st 5:or och fem st 2:or. Vi har 9 siffror i summan. Det finns $\dfrac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$ olika sätt att skriva summan.

Fall 4. Sex 5:or och inga 2:or. Summan kan skrivas på endast ett sätt.
Enligt additionsprincipen finns det totallt $1 + 66 + 126 + 1 = 194$ olika sätt att skriva 30 som en summa av 5:or och 2:or.

2. Avgör om slutledningen

$$((p \vee r) \wedge ((t \vee p) \to q) \wedge (r \to s)) \to (q \vee s)$$

är korrekt utan att använda sanningsvärdestabellen.

Lösning: 1) Antag att slutledningen inte är korrekt.
2) Detta innebär att förutsättningarna $p \vee r$, $(t \vee p) \to q$ och $r \to s$ är sanna medan slutsatsen $q \vee s$ är falsk.
3) Eftersom $q \vee s$ är falsk måste q och s vara falska.
4) Eftersom s är falsk och $r \to s$ är sann måste r vara falsk.
5) Eftersom r är falsk och $p \vee r$ är sann (enligt (2)) så måste p vara sann.
6) Eftersom q är falsk (enligt (3)) och $(t \vee p) \to q$ är sann (enligt (2)) så måste $t \vee p$ vara falsk.
7) Eftersom $t \vee p$ är falsk måste t och p vara falska.
Vi ser att antagandet (att slutledningen inte är korrekt) leder till en motsägelse, nämligen att utsagan p är både sann (enligt (5)) och falsk (enligt (7)). Därför är slutledningen korrekt.

Svar: Slutledningen är korrekt.

4. I ett konstmuseum var entréavgiften 85 kronor för barn och 221 kronor för vuxna. En kväll konstaterades att man fått 3587 kronor i kassan. Hur många barn och vuxna kan ha betalat entré?

Svar: Antingen 11 barn, 12 vuxna, eller 24 barn, 7 vuxna, eller 37 barn, 2 vuxna.

Lösning: Låt x vara antalet barn och y vara antalet vuxna som har betalat entré. Då måste vi lösa den diofantiska ekvationen $85x + 221y = 3587$. Först får vi att $sgd(221, 85) = 17$. Ekvationen har minst en lösning ty 17 delar talet 3587. Dividera ekvationens båda sidor med 17. Vi får ekvationen $5x + 13y = 211$, som har lösningen $x = -1055 + 13n$, $y = 422 - 5n$, där n är ett godtyckligt heltal. Eftersom $x \geq 0$ och $y \geq 0$ så är $\frac{1055}{13} \leq n \leq \frac{422}{5}$, dvs $81\frac{2}{13} \leq n \leq 84\frac{2}{5}$. Det innebär att $82 \leq n \leq 84$ ty n är ett heltal.

Om $n = 82$ får vi att $x = -1055 + 13 \cdot 82 = 11$, $y = 422 - 5 \cdot 82 = 12$.
Om $n = 83$ får vi att $x = -1055 + 13 \cdot 83 = 24$, $y = 422 - 5 \cdot 83 = 7$.
Om $n = 84$ får vi att $x = -1055 + 13 \cdot 84 = 37$, $y = 422 - 5 \cdot 84 = 2$.

5a. Låt G vara en enkel graf med 120 hörn och 310 kanter. Varje hörn i G har gradtal 6 eller 5. Hur många hörn har gradtal 6 och hur många har gradtal 5?
Svar: 20 hörn har gradtal 6 och 100 hörn har gradtal 5.

Lösning: Låt x vara antalet hörn i G med gradtal 6 och y vara antalet hörn med gradtal 5. Då är $x + y = 120$. Dessutom gäller, enligt handskakningslemmat, att $6x + 5y = 2|E(G)| = 620$. Vi får att $y = 120 - x$, $6x + 5(120 - x) = 620$. Alltså är $x = 20$ och $y = 120 - x = 100$.

5b. Låt symbolerna $a_1, a_2, ..., a_8$ förekomma med respektive frekvenser

$$w_1 = 8,\ w_2 = 9,\ w_3 = 23,\ w_4 = 30,\ w_5 = 35,\ w_6 = 70,\ w_7 = 70$$

i ett meddelande M skrivet i alfabetet $A = \{a_1, a_2, ..., a_7\}$.
Med hjälp av Huffmans algoritm hitta en optimal prefixkod $P = \{P(a_1), P(a_2), ..., P(a_8)\}$, d.v.s. en sådan prefixkod P att antalet siffror i koden $P(M)$ är minimalt.
Hur många siffror innehåller följden $P(M)$ för denna optimala prefixkod?

SVAR: $P(a_1) = 0000$, $P(a_2) = 0001$, $P(a_3) = 001$, $P(a_4) = 010$, $P(a_5) = 011$, $P(a_6) = 10$, $P(a_7) = 11$.
Antalet siffror i följden $P(M)$ är lika med

$8 \cdot 4 + 9 \cdot 4 + 23 \cdot 3 + 30 \cdot 3 + 35 \cdot 3 + 70 \cdot 2 + 100 \cdot 2 = 672.$

6. Bestäm antalet permutationer av siffrorna $1, 2, ..., 9$ som uppfyller nedanstående villkor:
-den fjärde siffran är inte en etta,
-den sjunde siffran är inte en fyra,
-trean står inte omedelbart före fyran.

LÖSNING: Låt U beteckna mängden av alla permutationer av siffrorna $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Det är klart att $|U| = 9!$.
Låt A_1 beteckna mängden av alla permutationer i U där den fjärde siffran är en etta,
A_2 mängden av alla permutationer i U där den sjunde siffran är en fyra,
A_3 mängden av alla permutationer i U där trean står omedelbart före fyran.
Då är antalet permutationer som uppfyller minst ett av villkorna i uppgiftet lika med
$9! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$. Vi har $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 8!$, $|A_1 \cap A_2| = 7!$, $|A_1 \cap A_3| = 6 \cdot 6!$, $|A_2 \cap A_3| = 7!$ och $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 6!$.

Då är $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3 \cdot 8! - 2 \cdot 7! - 6 \cdot 6! + 6!$.

Svar: $9! - 3 \cdot 8! + 2 \cdot 7! + 5 \cdot 6!$.