Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Avd. Tillämpad Matematik
Armen Asratian

SVAR TADI03 2017–10–27

1a. På hur många olika sätt kan bokstäverna T,U,N,N,E,L,B,A,N,E,S,T,A,T,I,O,N ordnas?

Svar: $\frac{17!}{4!3!2!2!}$.

1b. På hur många olika sätt kan bokstäverna T,U,N,N,E,L,B,A,N,E,S,T,A,T,I,O,N ordnas så att två T inte står bredvid varandra?

Svar: $\frac{14!}{4!2!2!}\binom{15}{3}$.

1c. På hur många sätt kan ordet TUNNELBANESTATION delas i fem delar på så sätt att varje del innehåller minst en bokstav?

Svar: $\binom{16}{4}$.

2. Bestäm alla positiva heltalslösningar (x, y) till ekvationen

$$49x + 126y = 2212.$$

Svar: Antingen $x = 4, y = 16$ eller $x = 22, y = 9$ eller $x = 40, y = 2$.

3. Avgör om slutledningen

$$((\neg r \vee s) \wedge ((p \vee t) \to q) \wedge (p \vee r)) \to (\neg q \to s)$$

är korrekt.

Svar: Slutledningen är korrekt.

4. Visa med induktion att formeln

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$$

5. Bestäm antalet heltal från 1 till och med 1000, som **inte** är delbara med något av talen 3, 5 eller 13.

Svar: 492 heltal.

6. En enkel graf G har 30 hörn med gradtalet ett, 15 hörn med gradtalet 2 och minst 30 hörn med gradtalet större än 2. Visa att G innehåller minst en cykel.

Lösning: Låt m vara antalet hörn med gradtalet större än 2. Då är $|V(G)| = 30+15+m = 45+m$. Enligt handskakningslemmat har vi att $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq 1 \cdot 30 + 2 \cdot 15 + 3m = 60 + 3m$.

Därför är $|E(G)| \geq 30 + \dfrac{3m}{2}$ och $|E(G)| - |V(G)| \geq (30 + \dfrac{3m}{2}) - (45+m) = \dfrac{m}{2} - 15 \geq \dfrac{30}{2} - 15 = 0$. Alltså gäller att $|E(G)| - |V(G)| \geq 0$, d.v.s. att $|E(G)| \geq |V(G)|$.

Antag nu att G saknar cykler. Låt $G_1, ..., G_k$ vara komponenterna av G, $k \geq 1$. Då är G_i ett träd och därför är $|E(G_i)| = |V(G_i)| - 1$, för $i = 1, ..., k$. Vi får att

$|E(G)| = |E(G_1)| + ... + |E(G_k)| = (|V(G_1)| - 1) + ... + (|V(G_k)| - 1) = |V(G)| - k$,

d.v.s. att $|E(G)| < |V(G)$. Det är omöjligt eftersom $|E(G) \geq |V(G)|$. Alltså innehåller G minst en cykel.