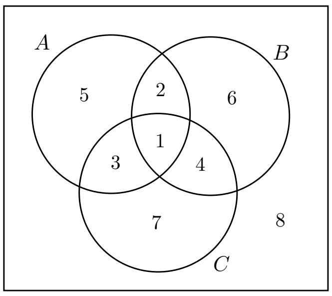
Att bevisa en mängdlikhet med hjälp av numrerat venndiagram

Exempel: Visa att $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ gäller för alla mängder A, B och C.

Att visa att likheten gäller för alla mängder innebär att vi måste föra ett generellt resonemang som är oberoende av vilka mängder vi har. Vi kan därmed inte utgå ifrån en viss uppsättning element utan baserar vårt resonemang på vilka områden i venndiagrammet som kommer med i vänster- respektive högerled. Vi använder därför ett **numrerat venndiagram** för att bevisa att likheten gäller. Vi går igenom *en operation i taget* för vänster respektive högerled och ser vilka områden de svarar mot:

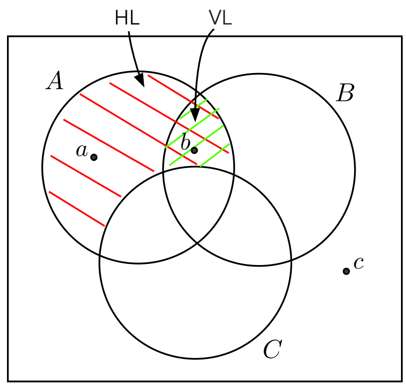


VL:	**HL:**
A: 1, 2, 3, 5	
B: 1, 2, 4, 6	
C: 1, 3, 4, 7	$A \cup B$: 1, 2, 3, 4, 5, 6
$B \cap C$: 1, 4	$A \cup C$: 1, 2, 3, 4, 5, 7
VL=$A \cup (B \cap C)$: 1, 2, 3, 4, 5	HL=$(A \cup B) \cap (A \cup C)$: 1, 2, 3, 4, 5

Slutsats: Då vänsterled och högerled svarar mot samma områden ovan gäller likheten för alla mängder A, B och C.

Att ge ett motexempel för en viss mängdlikhet

Exempel:
Visa att likheten $(A \cap B) \setminus C = A \setminus C$ **inte** gäller för alla mängder A, B och C.



Om vi undersöker och streckar i ett venndiagram vad vänsterled (grönmarkerat) respektive högerled (rödmarkerat) svarar mot kan vi se att de inte ger samma områden. Vänsterledet svarar mot ett område, medan högerledet svarar mot två i venndiagrammet. Vi kan utifrån denna bild konstruera ett motexempel. *Det viktiga är att få med minst ett element från det eller de områden där VL och HL skiljer sig åt.* I detta fall är det den del av A som bara är rödstreckad. Vi placerar därför ett element a i detta område. Det elementet kommer ge oss en motsägelse strax då detta element kommer kom med i HL, men inte i VL. Hur många ytterligare element man tar med är en smaksak. En möjlighet är till exempel:

Motexempel: Låt $A = \{a, b\}$, $B = \{b\}$, $C = \emptyset$ och $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$ (som i figuren ovan).

Med dessa mängder får vi nämligen:
VL $= (A \cap B) \setminus C = \{a, b\} \cap \{b\} \setminus \emptyset = \{b\} \setminus \emptyset = \{\mathbf{b}\}$
HL $= A \setminus C = \{a, b\} \setminus \emptyset = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

Slutsats: Då VL och HL ger olika mängder i exemplet ovan gäller inte likheten för alla mängder A, B och C.

Notera skillnaden mellan att ge ett bevis, baserat på ett resonemang om områden respektive att ge ett motexempel med konkreta mängder med element. En korrekt slutsats måste också alltid finnas med.