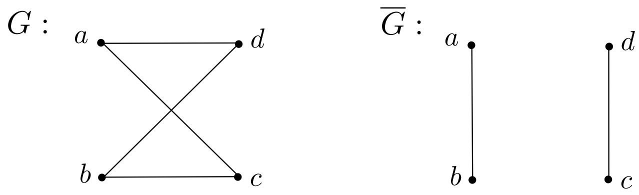
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp
2022-08-22

---

1. a) I figuren nedan visas grafen för G samt för komplementgrafen $\overline{G}$:



b) En graf är sammanhängande om det finns en väg mellan varje par av noder. Grafen G är sammanhängande, men $\overline{G}$ är inte sammanhängande, då det till exempel inte finns någon väg mellan nod a och d. Den är uppdelad i två komponenter.

c) G har en hamiltoncykel, till exempel: $a - c - b - d - a$. I $\overline{G}$ finns inga hamiltoncykler. Då grafen inte är sammanhängande finns det ingen sluten väg som besöker varje nod precis en gång.

Svar: a) Se komplementgrafen ovan.
b) G är sammanhängande, men inte $\overline{G}$.
c) G har hamiltoncykel, t ex $a - c - b - d - a$, men $\overline{G}$ saknar sådan.

2. a) Vi visar att $\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; q \rightarrow \neg p$ med hjälp av sanningsvärdestabell:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$q \rightarrow \neg p$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg p)$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Vi ser att sanningsvärdestabellen för $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg p)$ är 1 på alla rader (en tautologi) och därmed är de båda uttrycken $\neg(p \wedge q)$ och $q \rightarrow \neg p$ logiskt ekvivalenta, det vill säga $\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; q \rightarrow \neg p$.

b) Vi antar att utsagan nedan är falsk och resonerar oss fram till sanningsvärden för p, q och r.

$$p \wedge r \rightarrow \neg p \vee q$$

Då implikationen är falsk så måste $p \wedge r$ vara sann samtidigt som $\neg p \vee q$ är falsk. $p \wedge r$ sann gör att både p och r måste vara sanna. $\neg p \vee q$ falsk gör att både $\neg p$ och q måste vara falska. Att p sann och $\neg p$ falsk stämmer överens och vi har alltså att p sann, q falsk och r sann är enda möjligheten som gör uttrycket $p \wedge r \rightarrow \neg p \vee q$ falskt.

Svar: a) Se bevis ovan för att $\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; q \rightarrow \neg p$
b) $p \wedge r \rightarrow \neg p \vee q$ falsk gör att p är sann, q falsk och r sann.

3. Låt $M = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ och bilda mängderna:

$A = \{2n \mid n \in M\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,

$B = \{3n \mid n \in M\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$,

$C = \{4n \mid n \in M\} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$.

a) Vilken är störst av $|A|$, $|B|$ respektive $|C|$? Då alla mängderna innehåller 10 element är alla tre mängderna lika stora, d v s $|A| = |B| = |C| = 10$ så ingen av dem är störst.

b) $(A \cap B) \setminus C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \cap \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\} \setminus C =$
$= \{6, 12, 18\} \setminus \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\} = \{6, 18\}$.

c) $C \setminus A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\} \setminus \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} =$
$= \{24, 28, 32, 36, 40\}$. Då denna mängd innehåller 5 element så är antalet delmängder till denna $2^5 = 32$. Finns alltså 32 delmängder till $C \setminus A$.

Svar: a) Då $|A| = |B| = |C| = 10$ så är ingen av dem störst.
b) $(A \cap B) \setminus C = \{6, 18\}$.
c) $C \setminus A = \{24, 28, 32, 36, 40\}$ och har därför $2^5 = 32$ delmängder.

4. a) Bestäm samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen $24x + 76y = 880$.

Euklides algoritm ger:

$$\begin{aligned} 76 &= 3 \cdot 24 + 4 \\ 24 &= 6 \cdot 4 \end{aligned}$$

Vi får $\text{sgd}(76, 24) = 4$ och då $4 \mid 880$ så finns det lösningar enligt sats.

Vi bestämmer en första lösning till ekvationen genom att nysta upp euklides baklänges och därigenom uttrycka 4 i 76 och 24. Vi får:
$4 = 76 - 3 \cdot 24 = 1 \cdot 76 + 24(-3)$. Vi har alltså $24 \cdot (-3) + 76 \cdot (1) = 4$.
Vi förlänger med 220 och får $24 \cdot (-660) + 76 \cdot (220) = 880$.

Om vi jämför det sista uttrycket med den ursprungliga ekvationen så ser vi att en första lösning därmed är $(x_0, y_0) = (-660, 220)$ och samtliga lösningar ges då enligt sats av:

$$\begin{cases} x = -660 + \frac{76}{4} \cdot n \\ y = 220 - \frac{24}{4} \cdot n \end{cases} \text{där } n \in Z \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = -660 + 19 \cdot n \\ y = 220 - 6 \cdot n \end{cases} \text{där } n \in Z$$

b) Bestäm antalet tal mellan 1 och 600 som är delbara med 3 *eller* 5.

Antalet tal som är delbara med 3 eller 5 är de som är delbara med 3, delbara med 5 eller delbara med både 3 och 5. Antalet tal i intervallet 1-600 som är delbara med 3 är **200** stycken (vart tredje tal). Antalet som är delbart med 5 är på liknande sätt **120** st (vart 5:e tal). Om vi adderar dessa tal så har vi räknat de som delas av både 3 och 5 två gånger, så dessa måste dras bort en gång. Antalet som delas av både 3 och 5 är antalet som delas av 15, alltså $\frac{600}{15} = \mathbf{40}$ stycken. Så antalet som delas av 3 eller 5 blir: $200 + 120 - 40 = 280$ stycken.

Svar: a) Samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen är:

$$\begin{cases} x = -660 + 19 \cdot n \\ y = 220 - 6 \cdot n \end{cases} \text{där } n \in Z$$

b) Det finns 280 tal i intevallet 1-600 som är delbart med 3 eller 5.

5. Bland 10 studenter ska en styrelse utses som ska bestå av en ordförande, en kassör samt två ledamöter. Sanna och Ted är två av de 10 studenterna och en av dem ska vara ordförande. Sanna har meddelat att hon inte vill vara kassör, och Ted att han inte vill vara ledamot. Från övriga finns inga krav på roll i styrelsen. På hur många olika sätt kan styrelsen väljas bland de 10 studenterna utifrån villkoren ovan?

Vi löser problemet genom att dela upp i två fall:

1.) Ted är ordförande:

I så fall har vi 8 personer som kan ta kassörsposten, då Sanna vill undvika den. När kassör valts kan ledamöter väljas på $\binom{8}{2}$ sätt. Multiplikationsprincipen ger:

$1 \cdot 8 \cdot \binom{8}{2} = 8 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = \mathbf{224}$ olika sätt att välja styrelse med Ted som ordförande.

2.) Sanna är ordförande:

Ted vill inte vara ledamot, så för att inte få villkor (eller falluppdelning) utifrån om Ted tar kassörsposten eller ej, så är det enklare att först välja ledamöter på $\binom{8}{2}$ sätt och sedan välja en kassör bland de 7 återstående personerna, där Ted är en av dem. Vi får då antalet sätt med multiplikationsprincipen igen:

$1 \cdot \binom{8}{2} \cdot 7 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot 7 = \mathbf{196}$ olika sätt att välja styrelse med Sanna som ordförande.

(Möjligheten som nämns ovan att välja kassör först går naturligtvis också bra, men ger två fall, ett med Ted som kassör och ett där han inte är med alls.)

Vi adderar fallen för att få det totala antalet styrelser: $224 + 196 = \mathbf{420}$

Svar: Utifrån givna villkor finns det 420 olika sätt att välja styrelsen på.

6. Avgör med någon metod i kursen huruvida följande slutledning är korrekt eller ej.

$$(p \to \neg q) \land (q \lor r) \land (r \land p \to s) \land p \;\Rightarrow\; s$$

Vi kan visa att slutledningen är korrekt med hjälp av sanningsvärdestabell, deduktion eller reduktionsmetoden. Vi väljer här att göra det med deduktion.

1.)	p	Förutsättning
2.)	$p \to \neg q$	Förutsättning
3.)	$\neg q$	1.), 2.) och Modus ponens.
4.)	$q \lor r$	Förutsättning.
5.)	r	3.), 4.) och Disjunktiv syllogism.
6.)	$r \land p$	5.), 1.) och konjunktionsregeln.
7.)	$r \land p \to s$	Förutsättning
8.)	s	5.), 6.) och Modus ponens.

Vi har härlett slutsatsen s ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

Svar: Slutledningen är korrekt. Se deduktion ovan.

7. För vilka heltal $n \geq 0$ gäller olikheten $2^n > n^3$? Ange samtliga n för vilken olikheten gäller samt bevisa ditt påstående med hjälp av induktion.

Vi listar de lägsta värdena på n och ser om olikheten är uppfylld. Vi noterar att den är uppfylld för $n = 0$ och $n = 1$, men att det sedan dröjer till $n = 10$ innan 2^n är större än n^3. För stora n dominerar 2^n över n^3 (enligt hastighetstabellen från analyskursen) så vi försöker visa att olikheten gäller *för alla* $n \geq 10$, med hjälp av induktion.

n	2^n	n^3	$2^n > n^3$
0	1	0	OK
1	2	1	OK
2	4	8	Ej ok
3	8	27	Ej ok
4	16	64	Ej ok
5	32	125	Ej ok
6	64	216	Ej ok
7	128	343	Ej ok
8	256	512	Ej ok
9	512	729	Ej ok
10	1024	1000	OK

1.) Olikheten är uppfylld för startvärdet $n = 10$, då $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$.

2.) Antag nu att olikheten gäller för visst $n = p$, det vill säga att $2^p > p^3$, där $p \geq 10$. Visa att olikheten då också gäller för $n = p + 1$, det vill säga att $2^{p+1} > (p + 1)^3$.

I första olikheten nedan utnyttjar vi detta induktionsantagande. Vid de övriga olikheterna uttnyttjar vi bara att $p > 10$, vilket gör att vi kan ersätta en faktor p med 10 och vara säkra på att få något mindre eller lika stort.

$\mathrm{VL}_{p+1} = 2^{p+1} = 2 \cdot 2^p > 2p^3 = p^3 + p^3 \geq \big[\text{ då } p \geq 10 \,\big] \geq p^3 + 10p^2 = p^3 + 3p^2 + 7p^2 \geq \big[\text{ då } p > 1 \,\big] > p^3 + 3p^2 + 7p = p^3 + 3p^2 + 3p + 4p > p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = (p + 1)^3 = \mathrm{HL}_{p+1}$.

Vi har visat att om olikheten gäller för $n = p$ ($p \geq 10$) så gäller den också för $n = p+1$.

Punkt 1.) och 2.) ovan tillsammans visar att olikheten gäller för alla $n \geq 10$, enligt induktionsprincipen. Sammantaget innebär det att olikheten är sann för $n = 0$, $n = 1$ samt för alla $n \geq 10$.

Svar: Olikheten $2^n > n^3$ gäller för $n = 0$, $n = 1$ samt för alla $n \geq 10$.