Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp
2023-01-11

---

1. a) Låt $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 12\}$ och Låt A vara mängden av alla udda tal i $\mathcal{U}$ och B vara mängden av alla tal i $\mathcal{U}$ som är delbara med 3. Vi ska bestämma $\overline{A} \cap B$ och ange antalet delmängder till denna mängd. Ur ovan får vi att $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ och $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$. Detta ger:

$\overline{A} \cap B = \overline{\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}} \cap \{0, 3, 6, 9, 12\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\} \cap \{0, 3, 6, 9, 12\} =$

$= \{0, 6, 12\}$

Då denna mängd har tre element så har den $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ delmängder enligt multiplikationsprincipen, då varje element kan vara med eller inte med i en viss delmängd.

b) Följande likhet gäller inte för alla mängder A, B och C och vi ger därför ett motexempel.

$$A \cap (B \setminus \overline{C}) = (B \cap C) \setminus A$$

Låt $A = \{a\}$, $B = \{a\}$, $C = \{a\}$ och $\mathcal{U} = \{a, b\}$. Då blir:

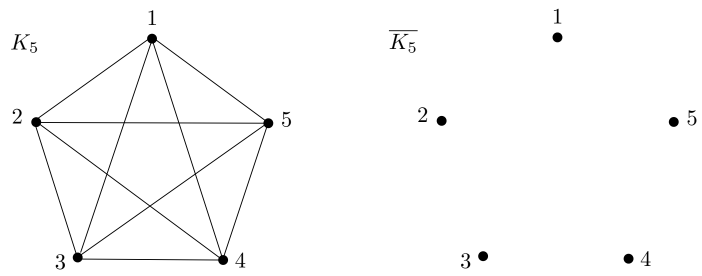
VL$= A \cap (B \setminus \overline{C}) = \{a\} \cap (\{a\} \setminus \{b\}) = \{a\} \cap \{a\} = \{a\}$.

HL$= (B \cap C) \setminus A = (\{a\} \cap \{a\}) \setminus \{a\} = \{a\} \setminus \{a\} = \emptyset$.

Då VL och HL ger olika mängder i exemplet ovan så gäller inte likheten för alla mängder A, B och C.

Svar: a) $A \cap (B \setminus \overline{C}) = \{0, 6, 12\}$. Denna har 8 delmängder.
b) Likheten gäller ej, se motexempel ovan.

2. a) Nedan visas grafen till K_5 samt dess komplementgraf $\overline{K_5}$. Den fullständiga grafen innehåller bågar mellan samtliga par av noder och därmed innehåller komplementgrafen inga bågar, bara noderna.



b) En graf har en sluten eulerväg om samtliga noder har jämnt gradtal enligt sats. Då alla noder i K_5 har gradtal 4 så finns det alltså en sluten eulerväg. Ett exempel på en sådan är: $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1 - 3 - 5 - 2 - 4 - 1$.
En graf har en öppen eulerväg om precis två noder har udda gradtal enligt sats. Då alla noder i K_5 har jämnt gradtal så finns det ingen öppen eulerväg i denna graf.

Var god vänd!

c) Då grafen är ett träd vet vi att $N = B + 1$, enligt satsen för träd, där N är antalet noder och B är antalet bågar. Kalla antalet löv för x (de med gradtal 1). Då är antalet noder i grafen $N = 5 + x$.

Antalet bågar kan vi få ur handskakningslemmat som säger att:

$$B = \frac{\text{summan av gradtalen}}{2} = \frac{5 \cdot 4 + x \cdot 1}{2} = \frac{20 + x}{2}.$$

Vi sätter in uttrycken för N och B ovan i sambandet för träd och får:

$$N = B+1 \;\Leftrightarrow\; 5+x = \frac{20+x}{2}+1 \;\Leftrightarrow\; 10+2x = 20+x+2 \;\Leftrightarrow\; 10+x = 22 \;\Leftrightarrow\; x = 12.$$

Grafen innehåller alltså 12 stycken löv.

Svar: a) Se grafen för K_5 och dess komplementgraf ovan.
b) Grafen har en sluten, men ej en öppen eulerväg. Se exempel och motivering ovan.
c) Grafen har 12 stycken löv.

3. På en teater kostade biljetterna 200:- för barn och 320:- för vuxna. Totalt fick teatern in 12 000:- vid en viss föreställning.

a) Vi anger den diofantiska ekvation uppgifterna ger upphov till samt bestämmer samtliga lösningar till denna ekvation. Om vi låter x vara antalet barn och y vara antalet vuxna som besökte föreställningen så får vi ekvationen:

$$200x+320y = 12000 \;\Leftrightarrow\; 5x+8y = 300$$

Ovan har vi förkortat den ursprungliga ekvationen med 40 för att få den högra och vi löser den senare ekvationen.

Euklides algoritm ger:

$$\begin{aligned} 8 &= 5+3 \\ 5 &= 3+2 \\ 3 &= 2+1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 \end{aligned}$$

Vi får $\text{sgd}(8,5) = 1$ och då $1|300$ så finns det lösningar enligt sats.

Vi bestämmer en första lösning till ekvationen genom att nysta upp euklides baklänges och därigenom uttrycka 1 i 8 och 5. Vi får:

$1 = 3-2 = 3-(5-3) = 2\cdot 3 - 5 = 2\cdot(8-5)-5 = 2\cdot 8 - 3 \cdot 5$. Vi har alltså $5\cdot(-3) + 8 \cdot 2 = 1$. Vi förlänger med 300 och får $5 \cdot (-900) + 8 \cdot (600) = 300$.

En första lösning är därmed $(x_0, y_0) = (-900, 600)$ och samtliga lösningar ges då

enligt sats av: $\begin{cases} x = -900 + 8 \cdot n \\ y = 600 - 5 \cdot n \end{cases}$ där n är ett godtyckligt heltal.

Var god vänd!

b) Bestäm hur många barn respektive vuxna som var på teatern om man vet att det var minst 15 barn och mer än 20 vuxna.

Vi sätter in dessa krav i uttrycket för samtliga lösningar och löser ekvationssystemet av olikheter. ”Mer än 20 vuxna ger en sträng olikhet på y. Vi får:

$$\begin{cases} x = -900 + 8 \cdot n \geq 15 \\ y = 600 - 5 \cdot n > 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8n \geq 915 \\ 580 > 5n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq \frac{915}{8} = 114\frac{3}{8} \\ n < \frac{580}{5} = 116 \end{cases}$$

Då n är ett heltal som ska vara större än $114\frac{3}{8}$ och strikt mindre än 116 så är $n = 115$ enda möjligheten. Detta värde på n insatt i uttrycket för alla lösningar ger:

$$\begin{cases} x = -900 + 8 \cdot 115 = -900 + 920 = 20 \\ y = 600 - 5 \cdot 115 = 600 - 575 = 25 \end{cases}$$

Det var alltså 20 barn och 25 vuxna på föreställningen.

Svar: a) Ekvationen blir $200x + 320y = 12000 \;\Leftrightarrow\; 5x + 8y = 300$. Alla lösningar blir:

$$\begin{cases} x = -900 + 8 \cdot n \\ y = 600 - 5 \cdot n \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är ett godtyckligt heltal.}$$

b) Det var 20 barn och 25 vuxna på föreställningen.

4. a) $\neg(p \wedge q)$ är logiskt ekvivalent med $q \to \neg p$ och vi kan visa det genom en sanningsvärdestabell eller genom att skriva vänsterledet till högerledet med hjälp av först De morgans lag, sedan implikationslagen, kontrapositiva lagen och sist dubbel negation. Vi redovisar lösning med sanningsvärdestabell nedan.

p	q	$p \wedge q$	VL: $\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	HL: $q \to \neg p$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Då sanningsvärdestabellen för både VL och HL är identiska på alla rader så är uttrycken logiskt ekvivalenta.

b) Följande slutledning gäller och vi kan visas den med deduktion, reduktionsmetoden eller med sanningsvärdestabell. Vi väljer att redovisa deduktion.

$$(s \vee r) \wedge (p \to q) \wedge \neg q \wedge (\neg p \to \neg s) \;\Rightarrow\; r$$

1.)	$\neg q$	Förutsättning
2.)	$p \to q$	Förutsättning
3.)	$\neg p$	1.), 2.) och modus tollens.
4.)	$\neg p \to \neg s$	Förutsättning.
5.)	$\neg s$	3.), 4.) och modus ponens.
6.)	$s \vee r$	Förutsättning.
7.)	r	5.), 6.) och disjunktiv syllogism.

Var god vänd!

Vi har härlett slutsatsen r ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

Svar:

a) $\neg(p \wedge q)$ är logiskt ekvivalent med $q \to \neg p$.

b) Slutledningen är korrekt. Se deduktion ovan.

5. a) Vi ska bestämma antalet olika sifferföljder om 8 siffror som vi kan bilda genom att omordna siffrorna i dagens datum: 20230111.

Vi har 8 siffror som ska omordnas, vilket kan göras på 8! sätt. Dock finns det två 2:or, två 0:or och tre 1:or och när till exempel två 2:or byter plast med varandra så fås inte en ny sifferföljd. Vi diverderar därför med 2! för vardera dubblet och dividerar med 3! för de tre 1:orna. Det ger:

$\dfrac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \mathbf{1680}$ olika sifferföljder med de givna 8:a siffrorna.

b) I hur många av följderna i a) står inte två 1:or intill varandra?

Vi börjar med att omordna alla siffrorna utom 1:orna. Vi har fem siffror: 2 2 0 0 3. Dessa kan med samma resonemang som i a) omordnas på

$\dfrac{5!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{120}{4} = 30$ olika sätt.

Efter att dessa omordnats dras de isär så att mellanrum skapas mellan talen samt platser före och efter, det kan till exempel se ut så här: _0_3_2_0_2_ .

Det finns då 6 platser som 1:orna kan ta utan att två 1:or hamnar intill varandra. Bland 6 platser ska vi välja 3 av dem för 1:or, utan inbördes ordning, vilket ger:

$\dbinom{6}{3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ sätt att placera 1:orna på.

Totalt finns då enligt multiplikationsprincipen $30 \cdot 20 = \mathbf{600}$ olika sifferföljder där två 1:or inte står intill varandra.

Svar:

a) Det finns 1680 olika sifferföljder som man kan bilda med siffrorna 20230111.

b) 600 av följderna i a) har inte två 1:or intill varandra.

6. Vi ska bestämma värdena på konstanterna a och b så att likheten nedan gäller för $n = 3$ och $n = 4$. Vi visar sedan med induktion att likheten gäller för alla $n \geq 3$ för dessa värden på a och b.

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = a \cdot n(n+1)(n+2) + b, \quad n \geq 3.$$

För $n = 3$ får vi ekvationen: $\frac{3 \cdot 4}{2} = a \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + b \iff 6 = 60a + b$.

För $n = 4$ får vi ekvationen: $6 + \frac{4 \cdot 5}{2} = a \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + b \iff 16 = 120a + b$.

Vi sätter ihop dessa ekvationer och löser ekvationssystemet genom att subtrahera ekvation 1 två gånger från ekvation två. Vi får:

$$\begin{cases} 60a + b = 6 \\ 120a + b = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} 60a + b = 6 \\ \quad\;\; - b = 4 \end{cases}$$

Den sista ekvationen ger att $b = -4$. Detta insatt i första ekvationen ger:

$60a - 4 = 6 \Leftrightarrow 60a = 10 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{6}$. Vi har alltså $a = \dfrac{1}{6}$ och $b = -4$.

Vi visar nu med induktion att likheten gäller med dessa värden på a och b för alla $n \geq 3$.

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - 4, \quad n \geq 3.$$

1.) Visa att likheten gäller för $n = 3$:

VL$= 6$. HL$= \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 5}{6} - 4 = 10 - 4 = 6$. $\text{VL}_3 = \text{HL}_3$, så likheten gäller för $n = 3$!

2.) Antag att likheten gäller för ett visst $n = p$: $\displaystyle\sum_{k=3}^{p} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{p(p+1)(p+2)}{6} - 4.$

Visa att då gäller likheten också för $n = p+1$: $\displaystyle\sum_{k=3}^{p+1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 4.$

$$\text{VL}_{p+1} = \sum_{k=3}^{p+1} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=3}^{p} \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(p+1)(p+2)}{2} = \text{(enligt induktionsantagande)}$$

$$= \frac{p(p+1)(p+2)}{6} - 4 + \frac{(p+1)(p+2)}{2} = \frac{p(p+1)(p+2)}{6} + \frac{3(p+1)(p+2)}{6} - 4 =$$

$$= \frac{p(p+1)(p+2) + 3(p+1)(p+2)}{6} - 4 = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 4 = \text{HL}_{p+1}.$$

1.) och 2.) ovan visar tillsammans att likheten gäller för alla $n \geq 3$, enligt induktionsprincipen.

Svar: Kraven för $n = 3$ och $n = 4$ ger $a = \frac{1}{6}$ och $b = -4$. Se induktionsbevis ovan för att likheten gäller för $n \geq 3$ med dessa värden på a och b.

7. a) Då G har n noder har ett spännande träd till G alltid $n - 1$ bågar (enl. sats för träd). Vi har m bågar i den ursprungliga grafen, men vill ha $n - 1$, så skillnaden mellan dessa är det antal vi måste ta bort, d v s $m - (n - 1) = m - n + 1$ bågar måste tas bort.

   b) Med n noder blir det i Kruskals algoritm alltid $n - 1$ bågar som ska väljas, oavsett hur många bågar den ursprungliga grafen innehåller. Om antalet bågar från början är $2(n - 1)$ så kommer vi i kantborttagning bli tvugna att ta bort $n - 1$ bågar, d v s lika många som vi väljer i Kruskals. Om antalet bågar från början är färre än $2(n - 1)$ så är kantborttagning effektivare, då det är färre vi tar bort än de vi ska ha kvar. Om antalet bågar från början är fler än $2(n-1)$ så blir det effektivare med Kruskals då vi behöver ta bort fler än de $n-1$ bågar som vi väljer med Kruskals. Kort sagt: Kruskals algoritm är effektivare om antalet bågar i den ursprungliga grafen är större än $2(n - 1)$, där n är antalet noder i grafen.

Svar: a) Vi måste ta bort $m - n + 1$ bågar (där n är antalet noder och m antalet bågar i G) för att få ett spännande träd.

b) Kruskals algoritm är effektivare om antalet bågar i den ursprungliga grafen är större än $2(n - 1)$, där n är antalet noder i grafen.