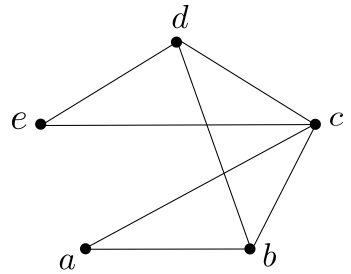
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

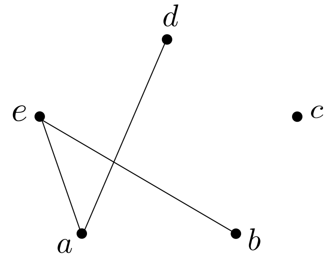
Lösningar till tentamen
TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp
2023-03-15

---

1. a) Enligt sats finns det en sluten eulerväg om alla noder har jämnt gradtal och det finns en öppen eulerväg om precis två noder har udda gradtal. Då noderna b och d har udda gradtal (3) och övriga noder jämnt gradtal (2 respektive 4) så finns det alltså ingen sluten eulerväg, men en öppen. Ett exempel på öppen eulerväg är: $b-c-d-e-c-a-b-d$.



   b) Komplementgrafen består av samma noder och har bågar mellan de noder som G inte har bågar. Komplementgrafen $\overline{G}$ visas i figuren till höger.

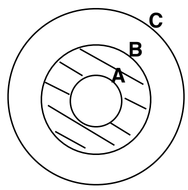


   c) Det finns en hamiltoncykel i G, till exempel: $a-b-d-e-c-a$.

   Svar: Se ovan.

2. a) Med $A = B = C = \mathcal{U}$ är villkoret $A \subseteq B \subseteq C$ uppfyllt och alltså kan A innehålla hela grundmängden, d v s maximalt 10 element. Med $B = A = \emptyset$ är också villkoret uppfyllt, så B kan alltså innehålla 0 element som minst.

   b) $B \setminus A$ svarar mot det streckade området i figuren intill. $C \setminus B$ svarar mot det ostreckade området mellan B och C. Ett element i $B \setminus A$ ligger inuti B, men ett element i $C \setminus B$ ligger utanför B. Ett element kan alltså inte tillhöra båda dessa mängder.



   $B \setminus A$ och $C \setminus B$ är därmed disjunkta (har inga gemensamma element) så enda möjligheten för $B \setminus A \subseteq C \setminus B$ är att $B \setminus A = \emptyset$, ty $\emptyset$ är delmängd till alla mängder. Att $B \setminus A = \emptyset$ innebär att alla element i B är element i A, det vill säga $B \subseteq A$. Då $A \subseteq B$ är givet från början följer att $A = B$.

   Svar: a) A kan innehålla maximalt 10 element (hela $\mathcal{U}$) och B kan som minst innehålla 0 element.
   b) $A = B$. Se motivering ovan.

3. Vi ska lösa den diofantiska ekvationen $49x + 126y = 1435$. Talet 49 delas av 7, vilket vi kan se att även 126 och 1435 gör. Om vi dividerar med 7 i alla termerna får vi följande ekvation att lösa:

$$7x + 18y = 205$$

Var god vänd!

Euklides algoritm ger:
$18 = 7 \cdot 2 + 4$
$7 = 4 \cdot 1 + 3$
$4 = 3 \cdot 1 + 1$
$3 = 3 \cdot 1$

Vi får $\text{sgd}(7, 18) = 1$ och då $1|205$ så har ekvationen lösningar.

Vi tar fram en första lösning (x_0, y_0) genom att nysta upp euklides baklänges, vi får:

$1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2 \cdot 4 - 7 = 2 \cdot (18 - 7 \cdot 2) - 7 = 2 \cdot 18 + 7 \cdot (-5)$. Vi har alltså $7 \cdot (-5) + 18 \cdot (2) = 1 \;\Leftrightarrow\; 7 \cdot (-1025) + 18 \cdot (410) = 205$, där vi i sista steget har multiplicerat med 205 för att få samma högerled som i ekvationen ovan.

En första lösning är alltså $(x_0, y_0) = (-1025, 410)$ och samtliga lösningar ges enligt sats av:

$$\begin{cases} x = -1025 + 18 \cdot n \\ y = 410 - 7 \cdot n \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är godtyckligt heltal.}$$

Vi tar fram de lösningar som är positiva genom att sätta x och y större än 0:

$$\begin{cases} x = -1025 + 18n > 0 \\ y = 410 - 7n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18n > 1025 \\ -7n > -410 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > \frac{1025}{18} = 56,96\ldots \\ n < \frac{410}{7} = 58,57\ldots \end{cases}$$

Vi får att $n = 57$ och $n = 58$ är de enda värdena som uppfyller båda olikheterna.

$$n = 57 : \begin{cases} x = -1025 + 18 \cdot 57 = 1 \\ y = 410 - 7 \cdot 57 = 11 \end{cases} \quad n = 58 : \begin{cases} x = -1025 + 18 \cdot 58 = 19 \\ y = 410 - 7 \cdot 58 = 4 \end{cases}$$

Svar: Den allmänna lösningen är $\begin{cases} x = -1025 + 18 \cdot n \\ y = 410 - 7 \cdot n \end{cases}$ där n är godtyckligt heltal.

och lösningar där x och y är positiva är $(x, y) = (1, 11)$ respektive $(x, y) = (19, 4)$

4. a) Vi har chokladägg i fyra färger: blåa, gröna, orange och rosa. Vi tar två av varje färg och lägger i en rad. 8 ägg kan ordnas på 8! sätt, men då två ägg av samma färg byter plats fås inte en ny ordning. Vi måste därför dividera med 2! för vardera par. Detta ger:

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520.$$

Det finns alltså **2520** sätt att ordna de äggen med två ur varje färg.

b) Vi ska fylla påskägg med 10 chokladägg i vardera som väljs bland äggen i de fyra färgerna. Då samma färg kan upprepas, men ingen ordning finns mellan de valda objekten är det en kombination med upprepning (staketproblem). Med fyra färger att välja bland har vi 3 staket samt 10 ägg att ordna, där staketen tar 3 av de 13 platserna. Vi får:

$\binom{3+10}{3} = \binom{13}{3} = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286$. Det finns alltså **286** olika färgkombinationer med 10 ägg som väljs bland de fyra färgerna.

Svar: a) De åtta äggen med två av varje färg kan ordnas på 2520 olika sätt.
b) 286 olika färgkombinationer med 10 ägg kan väljas bland de fyra färgerna.

5. Låt B vara antalet bågar, N vara antalet noder och x antalet löv i grafen.

   För träd gäller att $N = B + 1$.

   Enligt uppgiften har vi $N = 1 + 2 + 5 + x = 8 + x$.

   Handskakningslemmat säger att summan av gradtalen är 2 gånger antalet bågar så med de noder och gradtal som finns givna i uppgiften får vi:

   $2 \cdot B = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + x \cdot 1 \;\Leftrightarrow\; 2B = 29 + x \;\Leftrightarrow\; B = \frac{29+x}{2}$.

   Nu har vi både antalet noder N och antalet bågar B uttryckta i x och vi kan sätta in dessa uttryck i sambandet mellan noder och bågar för träd ovan. Vi får:

   $N = B + 1 \;\Leftrightarrow\; 8 + x = \frac{29+x}{2} + 1 \;\Leftrightarrow\; 16 + 2x = 29 + x + 2 \;\Leftrightarrow\; x = 31 - 16 = 15.$

   Det vill säga grafen har 15 löv.

   Svar: Grafen har 15 löv.

6. Avgör med någon metod i kursen huruvida följande slutledning är logiskt korrekt eller ej:

   $$(p \to \neg r) \wedge (s \vee t \to \neg q) \wedge p \wedge (\neg q \to r) \;\Rightarrow\; \neg s$$

   Vi kan använda sanningsvärdestabell, reduktionsmetoden eller deduktion för att visa att denna slutledningen är korrekt. Vi väljer här att redovisa lösningen med deduktion:

1.)	p	Förutsättning
2.)	$p \to \neg r$	Förutsättning
3.)	$\neg r$	1.), 2.) och modus ponens.
4.)	$\neg q \to r$	Förutsättning
5.)	$\neg(\neg q)$	3.), 4.) och modus tollens.
6.)	$s \vee t \to \neg q$	Förutsättning
7.)	$\neg(s \vee t)$	5.), 6.) och modus tollens.
8.)	$\neg s \wedge \neg t$	7.) och De Morgans lag.
9.)	$\neg s$	8.) och Konjunktiv förenkling.

   Vi har härlett slutsatsen $\neg s$ ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

   Svar: Slutledningen är korrekt. Se härledning ovan.

7. En talföljd a_n, där $n = 0, 1, 2, \ldots$ definieras rekursivt av uttrycket

   $$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}, & n = 2, 3, 4 \ldots \\ a_0 = 5, a_1 = 20 \end{cases}$$

   Vi bestämmer utifrån rekursionen de följande talen a_2 och a_3:

   $a_2 = 3 \cdot a_1 + 4 \cdot a_0 = 3 \cdot 20 + 4 \cdot 5 = 80$ och $80 = 5 \cdot 16 = 5 \cdot 2^4 = 5 \cdot 4^2$.

   $a_3 = 3 \cdot a_2 + 4 \cdot a_1 = 3 \cdot 80 + 4 \cdot 20 = 320$ och $320 = 5 \cdot 64 = 5 \cdot 2^6 = 5 \cdot 4^3$.

   Vi har alltså att $a_2 = 5 \cdot 4^2$ och $a_3 = 5 \cdot 4^3$. Genom att faktorisera talen så ser vi ett mönster som stämmer för de fyra första talen, att $a_n = 5 \cdot 4^n$.

   Vi visar nu att detta gäller för alla $n \geq 0$ med induktion. För att underlätta beviset låter vi a_n beteckna talföljden vi får ur rekursionen och b_n beteckna talföljden vi får ur formeln, alltså $b_n = 5 \cdot 4^n$. Vi vill visa att $a_n = b_n$ för alla $n \geq 0$.

Var god vänd!

1.) Visa att likheten stämmer för de två första värdena $n = 0$ och $n = 1$:

$a_0 = 5$ och $b_0 = 5 \cdot 4^0 = 5 \cdot 1 = 5$. Vi har $a_0 = b_0$, så likheten stämmer för $n = 0$.

$a_1 = 20$ och $b_1 = 5 \cdot 4^1 = 20$. Vi har $a_1 = b_1$, så likheten stämmer för $n = 1$.

2.) Antag nu att likheten gäller för två på varandra följande värden på n, säg för $n = p$ och $n = p - 1$, det vill säga att $a_p = b_p$ och $a_{p-1} = b_{p-1}$ $(*)$. Visa att då gäller likheten även för $n = p + 1$, det vill säga att $a_{p+1} = b_{p+1}$. Vi startar med a_{p+1} och visar med hjälp av rekursionen i första steget och sedan antagandet ovan att den är lika med b_{p+1}:

$$a_{p+1} = 3 \cdot a_p + 4 \cdot a_{p-1} \underset{(*)}{=} 3 \cdot b_p + 4 \cdot b_{p-1} = 3 \cdot 5 \cdot 4^p + 4 \cdot 5 \cdot 4^{p-1} = 3 \cdot 5 \cdot 4^p + 5 \cdot 4^p =$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot 4^p = 5 \cdot 4^{p+1} = b_{p+1}.$$

Vi har visat att om $a_p = b_p$ och $a_{p-1} = b_{p-1}$ så är också $a_{p+1} = b_{p+1}$.

1.) och 2.) ovan visar tillsammans att $a_n = b_n$ för alla $n \geq 0$, enligt induktionsprincipen. Vi har alltså visat att $a_n = 5 \cdot 4^n$ för alla $n \geq 0$.

Svar: $a_2 = 80$ och $a_3 = 320$ och vi har visat att $a_n = 5 \cdot 4^n$ för alla $n \geq 0$.