Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp
2023-08-21

---

1. a) Vi visar att $\neg(p \to s) \Leftrightarrow p \wedge \neg s$. med hjälp av sanningsvärdestabell. Kan också göras genom omskrivning med ekvivalenser. Kalla $S_1 : \neg(p \to s)$ och $S_2 : p \wedge \neg s$.

p	s	$p \to s$	S_1 : $\neg(p \to s)$	$\neg s$	S_2 : $p \wedge \neg s$	$S_1 \leftrightarrow S_2$ $\neg(p \to s) \leftrightarrow (p \wedge \neg s)$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Då både vänster och högerled ger samma sanningsvärdestabell (kolumn 4 och 6) så är de logiskt ekvivalenta. Detta visas också genom att den sammansatta utsagan i kolumn 7 är en tautologi. Uttrycken är därmed logiskt ekvivalenta.

b) Vi har den logiska slutledningen: *"Det regnar. Om det regnar så blåser det. Det blåser inte eller så lyser solen. Slutsats: Solen lyser."*

Vi inför satsparametrarna:

p : det regnar, q : det blåser, r : solen lyser.

Slutledningen ovan kan med de införda satsparametrarna skrivas:

$$p \wedge (p \to q) \wedge (\neg q \vee r) \;\Rightarrow\; r$$

c) Vi visar att slutledningen ovan gäller med hjälp av deduktion. Sanningstabell och reduktionsmetoden fungerar också utmärkt.

1.)	p	Förutsättning
2.)	$p \to q$	Förutsättning
3.)	q	1.), 2.) och modus ponens.
4.)	$\neg(\neg q)$	3. och dubbel negation.
5.)	$\neg q \vee r$	Förutsättning.
6.)	r	4.), 5.) och disjunktiv syllogism.

Vi har härlett slutsatsen r ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

Svar: a) Ekvivalensen gäller, se sanninsgvärdestabell ovan.
b - c) Slutledning är korrekt, se uttryck och deduktion ovan.

2. Vi visar med hjälp av induktion att följande likhet gäller för alla $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Var god vänd!

1) För $n = 1$ blir vänsterledet $\text{VL}_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ och högerledet $\text{HL}_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. Då $\text{VL}_1 = \text{HL}_1$ gäller alltså likheten för $n = 1$.

2) Antag att likheten gäller för $n = p$, d v s att $\sum_{k=1}^{p} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{p(p+1)(p+2)}{6}$.

Visa att då gäller likheten också för $n = p+1$, d v s att $\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}$.

$$\text{VL}_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{p} \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(p+1)(p+2)}{2} = \left[\text{ enligt induktionsantagande } \right] =$$

$$= \frac{p(p+1)(p+2)}{6} + \frac{(p+1)(p+2)}{2} = \frac{p(p+1)(p+2) + 3(p+1)(p+2)}{6} =$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} = \text{HL}_{p+1}$$

(I sista steget bryts $(p+1)(p+2)$ ut i täljaren.)

1.) och 2.) visar tillsammans att likheten gäller för att alla $n \geq 1$, enligt induktionsprincipen.

Svar: Se induktionsbevis ovan.

3. a) Vi bestämmer största gemensamma delare till talen 1050 och 1701. Detta kan göras med Euklides algoritm eller genom att primtalsfaktorisera talen. Då vi i b)-uppgiften kommer behöva faktorerna väljer vi att primtalsfaktorisera och läsa av gemensamma faktorer.

$1050 = 21 \cdot 50 = 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$

$1701 = 3 \cdot 567 = 3^2 \cdot 189 = 3^3 \cdot 63 = 3^3 \cdot 9 \cdot 7 = 3^5 \cdot 7.$

De faktorer som är gemensamma i primtalsfaktoriseringen av de två talen är 3 och 7, så $\text{sgd}(1050, 1701) = 21$.

b) Använd att $1050 \cdot 1701 = 1\,786\,050$. Bestäm utifrån det antalet olika positiva delare till talet 1 786 050. Vi kan alltså skriva:
$1\,786\,050 = 1050 \cdot 1701 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 3^5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2.$

Varje positiv delare till talet ovan består av en unik uppsättning primtalsfaktorer. För att bilda en delare kan vi tänka att vi väljer hur många 2:or vi ska ha med (0 eller 1, vilket ger två möjligheter), hur många 3:or vi ska ha med (0 till 6 st, vilket ger sju möjligheter), hur många 5:or vi ska ha med (0 till 2, vilket ger tre möjligheter) samt hur många 7:or vi ska med (0 till 2 st, vilket ger tre möjligheter). Enligt multiplikationsprincipen får vi då antalet positiva delar genom produkten för antalet möjligheter för alla fyra primtalen som $2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 = 126$ stycken.

Svar: a) Största gemensamma delaren för 1050 och 1701 är 21.
b) Det finns 126 olika positiva delare till talet 1 786 050.

4. a) En styrelse bestående av ordförande, kassör och sekreterare ska utses bland 8 studenter. På hur många sätt kan detta göras?

Vi har tre poster som vi tillsätter genom successiva val. Ordförande kan tillsättas på 8 sätt, kassör kan sedan väljas på 7 sätt och sist sekreterare på 6 sätt bland de återstående personerna. Multiplikationsprincipen ger då totalt $8 \cdot 7 \cdot 6 = \mathbf{336}$ sätt att välja styrelsen bland de 8 studenterna.

b) Av de 8 studenterna i a)-uppgiften är 5 dataingenjörer och 3 elektroingenjörer. På hur många sätt kan styrelsen väljas om vi lägger till villkoret att den ska innehålla minst en elektroingenjör?

Minst en elektroingenjör innebär en, två eller tre elektroingenjörer. Vi kan lösa uppgiften genom att dela upp i fall utifrån dessa tre möjligheter. Vi kan också ta samtliga vi fick i a) och dra bort de som inte innehåller några elektroingenjörer. Kvar blir då styrelser med ”minst en elektroingenjör”. Vi väljer det senare alternativet då det blir kortast. Styrelser utan elektroingenjörer är de som väljs bara bland de 5 dataingenjörerna, vilket med samma resonemang som i a) kan göras på $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ olika sätt. Vi tar alla minus detta antal och får: $336 - 60 = \mathbf{276}$.

Svar: a) Styrelsen kan väljas på 336 olika sätt.
b) Antalet styrelser som innehåller mins en elektroingenjör är 276 stycken.

5. a) Enligt binomialsatsen så gäller att:

$$(x^2y - \tfrac{2}{y})^{10} = \sum_{k=0}^{n} \binom{10}{k} (x^2 \cdot y)^k \left(\frac{-2}{y}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{10}{k} \cdot x^{2k} \cdot y^k \cdot \frac{(-2)^{10-k}}{y^{10-k}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{10}{k} \cdot x^{2k} \cdot y^{k-(10-k)} \cdot (-2)^{10-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{10}{k} \cdot x^{2k} \cdot y^{2k-10} \cdot (-2)^{10-k}$$

För att få en $x^{14}y^4$-term måste $2k = 14$ och $2k - 10 = 4$. Båda dessa ekvationer löses endast av $k = 7$. Det finns alltså en $x^{14}y^4$-term i utvecklingen och vi kan få dess koefficient genom att lyfta ut bara den term som svarar mot $k = 7$ i utvecklingen. Vi får:

$$\binom{10}{7} \cdot x^{14}y^4 \cdot (-2)^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (-8) \cdot x^{14}y^4 = 120 \cdot (-8) \cdot x^{14}y^4 = -960 \cdot x^{14}y^4.$$

Koefficienten för $x^{14}y^4$ är alltså -960.

b) För en graf som är ett träd gäller enligt sats att $N = B + 1$, där N är antalet noder och B är antalet bågar. Låt x vara antalet löv i grafen (de med grad 1). Då är antalet noder enligt uppgiften $N = 8 + 4 + x = 12 + x$.

Enligt handskakningslemmat är 2 gånger antalet bågar lika med summan av gradtalen i grafen. Det ger att antalet bågar är summan av gradtalen genom två. Utifrån gradtalen i uppgiften får vi: $B = \dfrac{8 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot x}{2} = \dfrac{80 + x}{2}$.

Om vi sätter in de uttryck vi nu fått fram för N och B, uttryckta i x, i sambandet för träd får vi:

$$N = B + 1 \;\Leftrightarrow\; 12 + x = \frac{80 + x}{2} + 1 \;\Leftrightarrow\; 24 + 2x = 80 + x + 2 \;\Leftrightarrow$$
$$24 + x = 82 \;\Leftrightarrow\; x = 58.$$

Antalet löv i grafen är alltså 58 stycken.

Svar: a) Ja, utvecklingen innehåller en $x^{14}y^4$-term och koefficienten för den är -960.
b) Antalet löv i grafen är 58 stycken.

6. a) $(B \setminus C)^c \cap A = (A \cap C) \setminus B$

Vi ger ett motexempel som visar att denna likheten inte gäller för alla mängder.

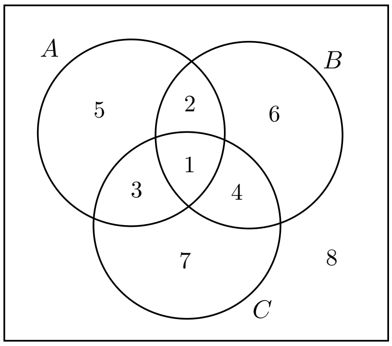
Låt $A = B = C = \{a\}$ och $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$. Vi får:

VL$= (B \setminus C)^c \cap A = (\{a\} \setminus \{a\})^c \cap \{a\} = \emptyset^c \cap \{a\} = \{a, b, c\} \cap \{a\} = \{a\}$.
HL$= (A \cap C) \setminus B = (\{a\} \cap \{a\}) \setminus \{a\} = \{a\} \setminus \{a\} = \emptyset$.

Då VL och HL ger olika mängder i exemplet ovan så gäller inte likheten för alla mängder A, B och C.

b) $(A \cap B^c) \setminus C = (C^c \cap A) \setminus B$

Vi använder ett numrerat venndiagram och går igenom operationerna i vänsterled och högerled var för sig och ser vilka områden de svarar mot.

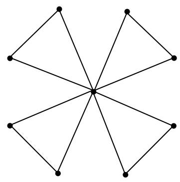


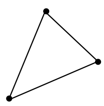
VL:	HL:
A: $1, 2, 3, 5$	C: $1, 3, 4, 7$
B: $1, 2, 4, 6$	C^c: $2, 5, 6, 8$
B^c: $3, 5, 7, 8$	$C^c \cap A$: $2, 5$
$A \cap B^c$: $3, 5$	HL$=(C^c \cap A) \setminus B$: 5
C: $1, 3, 4, 7$	
VL$=(A \cap B^c) \setminus C$: 5	

Då VL och HL svarar mot samma område i det numrerade venndiagrammet ovan har vi visat att likheten gäller för alla mängder A, B och C.

Svar: a) Likheten gäller ej, se motexempel ovan.
b) Likheten gäller, se bevis ovan.

7. Blomgrafen B_n består av en nod i mitten (pistill) och n stycken trekantiga blomblad. Figuren visar grafen B_4. Varje sluten väg som ska besöka alla noder måste besöka pistillnoden flera gånger för att komma vidare till nästa blomblad, så någon hamiltoncykel finns ej för $n \geq 2$. För ytterligheten $n = 1$ ser dock blomgrafen ut som figuren visar med ett blad. Denna kan genomlöpas medurs eller moturs, så för $n = 1$ har vi 2 hamiltoncykler.





När det gäller slutna eulervägar så ser vi att det är möjligt att gå runt alla blomblad och använda varje båge en gång för alla n. Antalet olika eulervägar kan vi få genom att räkna på hur många olika sätt vi kan genomlöpa blombladen. Dels i vilken ordning vi tar bladen, dels om vi går medurs eller moturs i varje blad. Då slutna vägar inte betraktas som olika om de genomlöper kanter och noder i samma ordning så är det inte var vi startar som är viktigt. Välj vilket blomblad som helst som startblad och gå igenom det medurs eller moturs (2 möjligheter). Nu finns det $(n-1)$ olika blad att välja bland som nästa blad samt om det ska genomlöpas med- eller moturs. (x2) När detta gjorts finns det $(n-2)$ blad att välja bland samt om bladet ska genomlöpas med- eller moturs (x2). Detta upprepas tills alla de n bladen genomlöpts. Totalt får vi alltså med multiplikationsprincipen $(n-1)! \cdot 2^n$ olika slutna eulervägar. (Denna gäller även för $n = 1$ då 0!=1. Vi får 2 slutna eulervägar för $n = 1$ vilket vi också ser stämmer i den nedre grafen ovan.)

Svar: Det finns inga hamiltoncykler i B_n för $n \geq 2$, för $n = 1$ finns det två hamiltoncykler. Det finns $(n-1)! \cdot 2^n$ olika slutna eulervägar i B_n för $n \geq 1$.