Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

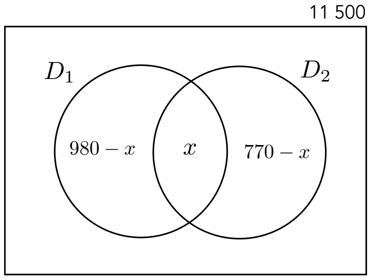
Lösningar till tentamen
TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp
2024-01-10

---

1. I staden Lillköping bor det 11 500 personer. Låt D_1 vara mängden av alla personer i Lillköping som har bostadsbidrag och D_2 vara mängden av alla i Lillköping som har studiebidrag. D_1 innehåller 980 personer, D_2 innehåller 770 personer och sammanlagt innehåller D_1 och D_2 1600 personer. Använd ett venndiagram och besvara följande frågor:

   a) Hur många personer i Lillköping finns inte i D_1 eller D_2?

   I uppgiften står att 1600 personer ryms inom D_1 och D_2 så de som inte finns med där är helt enkelt $11500 - 1600 = \mathbf{9900}$.



   b) Hur många personer har både bostadsbidrag och studiebidrag? Det är de som finns i $D_1 \cap D_2$. Om vi kallar detta antal för x så kan vi uttrycka de som finns bara i D_1 som $980 - x$ och de som bara finns i D_2 som $770 - x$. Summerar vi dessa tre områden så ska vi få 1600 vilket ger ekvationen:

   $(980 - x) + x + (770 - x) = 1600 \Leftrightarrow 1750 - x = 1600 \Leftrightarrow 1750 - 1600 = x \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x = 150$ Alltså har **150** personer både bostadsbidrag och studiebidrag.

   (Vi kan också lösa uppgiften genom att lägga ihop antalen i D_1 och D_2 (ger 1750) och argumentera för att överlappet mellan dem måste vara så stort att totalen blir 1600.)

   c) Ange $|D_2 \setminus D_1|$ samt antalet delmängder till denna mängd. Med beräkningarna i b) får vi $|D_2 \setminus D_1| = 770 - 150 = \mathbf{620}$, alltså de personer som bara har studiebidrag. Antalet delmängder till en mängd med 620 element är (det ofattbart stora talet) 2^{620}.

   Svar: a) 9900 personer finns inte i D_1 eller D_2.
   b) 150 personer har både bostadsbidrag och studiebidrag.
   c) $|D_2 \setminus D_1| = 620$ och denna mängd har därför 2^{620} delmängder.

2. a) Finns det någon graf med 14 noder av grad 6, 10 av grad 5 och 7 noder av grad 7? Om vi summerar gradtalen får vi $14 \cdot 6 + 10 \cdot 5 + 7 \cdot 7 = 84 + 50 + 49 = 183$. Enligt Handskakningslemmat så är summan av gradtalen i varje graf alltid jämn, så en sådan graf kan inte finnas där summan är 183, då det är ett udda tal.

   b) En graf är ett träd och innehåller 19 löv, en nod av grad 3, två noder av grad 5 samt ett visst antal noder av grad 4. Vi bestämmer utifrån givna satser hur många noder av grad 4 grafen måste innehålla. Kalla antalet noder av grad 4 för x. Enligt satsen för träd så gäller $N = B + 1$, där N är antalet noder och B är antalet bågar. Med informationen i uppgiften så kan vi summera antalet noder till $N = 19 + 1 + 2 + x = 22 + x$.

Var god vänd!

Enligt handskakningslemmat är summan av gradtalen två gånger antalet bågar, så vi kan beräkna B genom att summan av gradtalen delas med två. Vi får:

$$B = \frac{\text{Summan av gradtalen}}{2} = \frac{19 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot x}{2} = \frac{32 + 4x}{2} = 16 + 2x.$$

Vi sätter nu in uttrycken för N och B i ekvationen för träd. Det ger:

$N = B + 1 \;\Leftrightarrow\; 22 + x = (16 + 2x) + 1 \;\Leftrightarrow\; 22 + x = 2x + 17 \;\Leftrightarrow\; 5 + x = 2x \;\Leftrightarrow\; 5 = x$. Antalet noder av grad 4 måste alltså vara 5 stycken.

Svar: a) Nej, en sådan graf finns inte enligt handskakningslemmat.
b) Grafen innehåller 5 noder av grad 4.

3. a) Avgör om det satslogiska uttrycket $p \to (q \vee \neg p)$ är en tautologi eller en kontradiktion eller ingen av dessa två. Vi tar fram uttryckets sanningsvärdestabell för att besvara frågan.

p	q	$\neg p$	$q \vee \neg p$	$p \to (q \vee \neg p)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Ett uttryck är en tautologi om sanningsvärdestabellen har ettor på alla rader och är en kontradiktion om det är 0:or på alla rader. Då sanningsvärdestabellen i den sista kolumnen visar att uttrycket kan vara både sant respektive falsk, så är det varken en tautologi eller en kontradiktion.

b) Vi formulerar följande utsaga av Ture Sventon som ett satslogiskt uttryck och avgör om slutledningen är korrekt.

”Om brottet begicks på dagen så finns det många vittnen. Om brottet begicks av Ville Vessla så skedde det på dagen. Det finns inte många vittnen till brottet. Alltså begicks inte brottet av Ville Vessla.”

Låt p: Brottet begicks på dagen, q: Det fanns många vittnen till brottet,
r: Brottet begicks av Ville Vessla.

Utsagan blir då på satslogisk form:

$$(p \to q) \wedge (r \to p) \wedge \neg q \;\Rightarrow\; \neg r$$

Vi kan visa att $\neg r$ är en logiskt korrekt slutsats ur förutsättningar med sanningsvärdestabell (visa att implikationen är en tautologi), med reduktionsmetoden eller med deduktion. Vi väljer i detta fall deduktion:

1. $\neg q$ Förutsättning
2. $p \to q$ Förutsättning
3. $\neg p$ 1, 2 och Modus Tollens.
4. $r \to p$ Förutsättning
5. $\neg r$ 3, 4 och Modus Tollens.

Vi har med deduktion visat att $\neg r$: ”Brottet begicks inte av Ville Vessla” är en logiskt korrekt slutsats ur förutsättningarna.

Svar: Ture Sventon hade naturligtvis rätt. Brottet begicks inte av Ville Vessla. Se satslogiskt uttryck och deduktion ovan.

Svar: a) Uttrycket är varken en tautologi eller en kontradiktion. Motivering ovan.
b) Slutledningen gäller. Se satslogiskt uttryck och deduktion ovan.

4. För vilket startvärde a gäller följande likhet? Bestäm a och visa sedan med hjälp av induktion att likheten gäller för alla heltal n som är större än eller lika med detta värde på a.

$$\sum_{k=a}^{n}(2k+3) = n^2 + 4n - 5$$

Om $a = 1$ så blir $\mathrm{VL}_1 = \sum_{k=1}^{1}(2k+3) = 5$ och $\mathrm{HL}_1 = 1^2 + 4 \cdot 1 - 5 = 0$, så höger- och vänsterled blir inte lika när vi räknar ut VL och HL för $n = 1$ då $a = 1$.

Om $a = 2$ så blir $\mathrm{VL}_2 = \sum_{k=2}^{2}(2k+3) = 7$ och $\mathrm{HL}_2 = 2^2 + 4 \cdot 2 - 5 = 7$, så höger och vänsterled blir lika när vi räknar ut VL och HL för $n = 2$. $a = 2$ är alltså en kandidat.

Vi testar att räkna ut vänster- och högerled för $a = 2$ och $n = 3$ också. Vi får:

$\mathrm{VL}_3 = \sum_{k=2}^{3}(2k+3) = 7 + 9 = 16$ och $\mathrm{HL}_3 = 3^2 + 4 \cdot 3 - 5 = 9 + 12 - 5 = 16$, så höger och vänsterled blir lika även för $n = 3$ då $a = 2$.

Vi visar därför att $\sum_{k=2}^{n}(2k+3) = n^2 + 4n - 5$ för alla $n \geq 2$ med hjälp av induktion.

1.) Likheten gäller för $n = 2$. Enligt ovan är $\mathrm{VL}_2 = 7$ och $\mathrm{HL}_2 = 7$.

2.) Antag att likheten gäller för något $n = p$, det vill säga att $\sum_{k=2}^{p}(2k+3) = p^2+4p-5$.

Visa att likheten då gäller för $n = p + 1$, d v s $\sum_{k=2}^{p+1}(2k+3) = (p+1)^2 + 4(p+1) - 5$.

$\mathrm{VL}_{p+1} = \sum_{k=2}^{p+1}(2k+3) = \sum_{k=2}^{p}(2k+3) + 2(p+1) + 3 =$ [Enligt induktionsantagande] $=$

$= p^2 + 4p - 5 + 2(p+1) + 3 = p^2 + 6p$.

Vi utvecklar $\mathrm{HL}_{p+1} = (p+1)^2 + 4(p+1) - 5 = p^2 + 2p + 1 + 4p + 4 - 5 = p^2 + 6p$.

Alltså är $\mathrm{VL}_{p+1} = \mathrm{HL}_{p+1}$ om $\mathrm{VL}_p = \mathrm{HL}_p$.

Enligt punkt 1.) och 2.) ovan gäller likheten $\sum_{k=2}^{n}(2k+3) = n^2 + 4n - 5$ för alla $n \geq 2$, enligt induktionsprincipen.

Svar: För $a = 2$ gäller likheten för alla heltal $n \geq 2$. Se induktionsbevis ovan.

5. Fem kvinnor och tre män kandiderar till ett utskott som ska bestå av en ordförande, en vice ordförande, en sekreterare och en kassör, totalt alltså fyra poster i utskottet. På hur många olika sätt kan utskottet bildas av de åtta kandidaterna om:

   a) Utskottet ska bara innehålla kvinnor.

   Med 5 kvinnor som ska väljas till 4 poster så kan ordförande väljas på 5 sätt, vice ordförande på 4 sätt, sekreterare på 3 sätt och kassör på 2 sätt. Enligt multiplikationsprincipen finns då $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{120}$ sätt att bilda utskottet på.

   b) Utskottet ska innehålla precis en man.

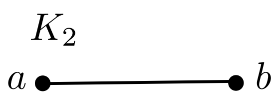
   Vi kan välja vilken man på 3 sätt. Den valda mannen kan sedan tilldelas en av fyra poster på 4 sätt. Övriga tre poster tas sedan av de 5 kvinnorna, så enligt multiplikationsprincipen så finns $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \mathbf{720}$ olika sätt att bilda utskottet på.

   c) Utskottet ska innehålla minst en man.

   ”Minst en man” motsvarar en, två eller tre män. Vi kan lösa uppgiften genom att dela upp i fall, där fallet ”precis en man” redan beräknats i b). Kortare blir dock att ta samtliga utskott minus de med bara kvinnor, de i a). Enligt multiplikationsprincipen får vi utifrån samma strategi som i a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680$ styrelser totalt. Vi drar sedan bort de 120 vi fick med bara kvinnor i a) och får $1680 - 120 = \mathbf{1560}$ olika styrelser med minst en man.

Svar: a) Det finns 120 styrelser med bara kvinnor.
b) Det finns 720 styrelser med precis en man.
c) Det finns 1560 styrelser med minst en man.

6. Betrakta grafen K_2, den fullständiga grafen med två noder i figuren intill.



   a) Då båda noderna a och b har grad 1 så finns det enligt sats en öppen eulerväg, då precis två noder har udda grad. Exempel: $a - b$.

   Enligt samma sats finns en sluten eulerväg om samtliga noder har jämnt gradtal, vilket alltså inte gäller här, så ingen sluten eulerväg finns.

   Definitionen av hamiltoncykel görs i grafer med minst 3 noder. Utifrån det kan man säga att det inte finns i denna graf. Å andra sidan kan vägen $a - b - a$ uppfattas som en hamiltoncykel. Båda argumenten bedöms här som korrekta.

   b) Bestäm antalet delgrafer till K_2. En delgraf består av en delmängd av noderna (inklusive tomma mängden) samt en delmängd av de möjliga bågarna utifrån de noder som valts. En delgraf till K_2 kan därför bestå av tomma grafen, bara noden a, bara noden b, båda noderna utan båge samt båda noderna med bågen. Det finns alltså **5 olika delgrafer** till K_2.

Svar: Se ovan.

7. a) Ange samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen $255x + 231y = 303$.

Euklides algoritm ger:

$$\begin{aligned} 255 &= 231 + 24 \\ 231 &= 9 \cdot 24 + 15 \\ 24 &= 15 + 9 \\ 15 &= 9 + 6 \\ 9 &= 6 + 3 \\ 6 &= 3 \cdot 2 \end{aligned}$$

Vi får $\mathrm{sgd}(255, 231) = 3$ och då $3|303$ så finns det lösningar enligt sats.

Vi bestämmer en första lösning till ekvationen genom att nysta upp euklides baklänges och därigenom uttrycka 3 i 255 och 231. Vi får:

$3 = 9 - 6 = 9 - (15 - 9) = 2 \cdot 9 - 15 = 2 \cdot (24 - 15) - 15 = 2 \cdot 24 - 3 \cdot 15 = 2 \cdot 24 - 3 \cdot (231 - 9 \cdot 24) = 29 \cdot 24 - 3 \cdot 231 = 29 \cdot (255 - 231) - 3 \cdot 231 = 29 \cdot 255 - 32 \cdot 231$.

Vi har alltså: $255(29) + 231(-32) = 3$.

Vi förlänger med 101 och får $255(2929) + 231(-3232) = 303$.

En första lösning är därmed $(x_0, y_0) = (2929, -3232)$ och samtliga lösningar ges då enligt sats av:

$$\begin{cases} x = 2929 - \frac{231}{3} \cdot n \\ y = -3232 + \frac{255}{3} \cdot n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2929 - 77 \cdot n \\ y = -3232 + 85 \cdot n \end{cases} \quad \text{där } n \in \mathbf{Z}.$$

b) Finns det lösningar där både x och y är positiva?

Betrakta ekvationen $255x + 231y = 303$. Vi konstaterar att det minsta positiva tal vi kan sätta in på både x och y är 1, men summan av koefficienterna framför x och y, $255 + 231$ blir större än 303, så för varje lösning (x, y) måste någon av x eller y vara negativ för att summan ska kunna bli 303. Det finns alltså ingen lösning där både x och y är positiva.

Svar: a) Samtliga lösningar ges av $\begin{cases} x = 2929 - 77 \cdot n \\ y = -3232 + 85 \cdot n \end{cases}$ där $n \in \mathbf{Z}$.

b) Det finns inga lösningar där både x och y är positiva. Se motivering ovan.