Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp
2024-03-13

---

1. a) Vi bestämmer sgd(2250, 1485) med hjälp av euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 2250 &= 1485 + 765 \\ 1485 &= 765 + 720 \\ 765 &= 720 + 45 \\ 720 &= 16 \cdot 45 \end{aligned}$$

Vi får $\mathrm{sgd}(2250, 1485) = 45$.

b) Vi ska lösa den diofantiska ekvationen $2250x + 1485y = 1350$.

Då $\mathrm{sgd}(2250, 1485) = 45$ och 45 delar 1350 ($1350 = 30 \cdot 45$) så finns lösningar enligt sats och vi kan dessutom förkorta ekvationen med 45 innan vi löser den. Vi får då ekvationen: $50x + 33y = 30$.

Euklides algoritm på 50 och 33 ger:

$$\begin{aligned} 50 &= 33 + 17 \\ 33 &= 17 + 16 \\ 17 &= 16 + 1 \\ 16 &= 16 \cdot 1 \end{aligned}$$

För att finna en första lösning till ekvationen uttrycker vi 1 i 50 och 33 genom att nysta upp euklides algoritm baklänges. Vi får:
$1 = 17 - 16 = 17 - (33 - 17) = 2 \cdot 17 - 33 = 2(50 - 33) - 33 = 2 \cdot 50 - 3 \cdot 33$. Vilket ger $50 \cdot 2 + 33(-3) = 1$. Vi förlänger med 30 och får $50 \cdot 60 + 33(-90) = 30$.

En första lösning är därmed $(x_0, y_0) = (60, -90)$ och samtliga lösningar ges då

enligt sats av: $\begin{cases} x = 60 - 33n \\ y = -90 + 50n \end{cases}$ där n är ett godtyckligt heltal.

Svar: a) $\mathrm{sgd}(2250, 1485) = 45$.

b) Samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen är

$\begin{cases} x = 60 - 33n \\ y = -90 + 50n \end{cases}$ där n är ett godtyckligt heltal.

2. a) Vi visar att Modus tollens: $(p \to q) \land \neg q \;\Rightarrow\; \neg p$ är en korrekt logisk implikation med hjälp av sanningsvärdestabell.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$(p \to q) \land \neg q$	$\neg p$	$(p \to q) \land \neg q \to \neg p$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Var god vänd!

Vi ser att implikationen i sista kolumnen är sann på alla rader, alltså en tautologi, och därmed har vi visat att $(p \to q) \wedge \neg q \;\Rightarrow\; \neg p$ är en korrekt logisk implikation.

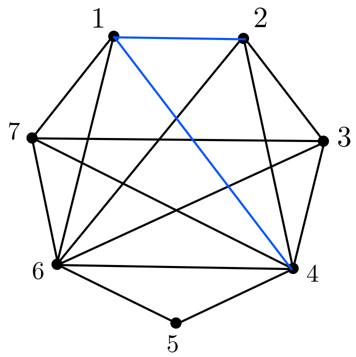
b) Slutledningen nedan är ej korrekt. Vi ger ett motexempel som visar att alla förutsättningar kan vara sanna samtidigt som slutsatsen är falsk.

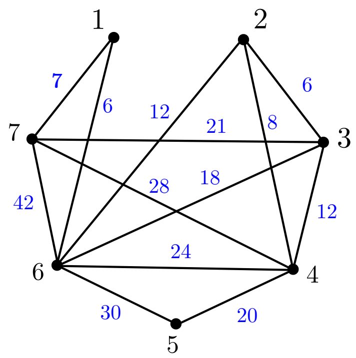
$$(r \to s) \wedge (p \to \neg r) \wedge p \;\Rightarrow\; \neg s$$

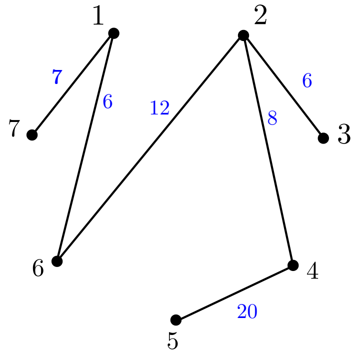
Om p är sann, r är falsk och s sann så blir $r \to s$ sann, $p \to \neg r$ sann och p sann, alltså är alla förutsättningar sanna för denna uppsättning sanningsvärden, men $\neg s$ blir falsk. Alltså gäller inte denna slutledning då det finns en rad i sanningsvärdestabellen där implikationen blir falsk. Detta ger alltså ett motexempel.

Svar: a) Se bevis för modus tollens ovan.
b) Slutledningen är ej korrekt, se motexempel ovan.

3. a) Enligt sats finns det en sluten eulerväg om samtliga noder har jämnt gradtal. I den ursprungliga grafen (svarta bågar) har nod 2 och 4 udda gradtal, övriga har jämna gradtal, så någon sluten eulerväg finns ej. Om både nod 2 och 4 ansluts med en båge till nod 1 (en nod som båda saknar förbindelse till) så kommer alla noder få jämnt gradtal och därmed kommer det existera en sluten eulerväg. (Det är nödvändigt att ansluta noderna 2 och 4 till samma nod för att inte skapa nya noder med udda gradtal.) Det minsta antal bågar som behöver läggas till är alltså 2 och dessa måste anslutas till nod 1. Drar man bara en båge till från nod 2 till 4 så blir inte grafen längre enkel, då den då har dubbla bågar mellan 2 och 4.







b) I figuren till höger visas den viktade grafen med kostnader utskrivna i blått. Vi tar fram ett billigaste nätverk med hjälp av Kruskals algoritm. Starta med noderna utan bågar. De billigaste bågarna är de med kostnad 6. Välj bågen (1-6). Även bågen (2-3) med kostnad 6 kan väljas utan att cykel bildas. Nästa billigaste båge är (1-7) med kostnad 7. Väljs, då cykel ej bildas. Nästa billigaste båge är (2-4) med kostnad 8. Väljs, då cykel ej bildas. Nästa billigaste bågar är de med kostnad 12. Bågen (3-4) väljs **ej** då cykel då bildas, men båge (2-6) väjs, då cykel ej bildas. Nästa billigaste båge är (3-6) med kostnad 18. Väljs **ej** då cykel då bildas med de tidigare valda. Nästa billigaste båge är (4-5) med kostnad 20. Väljs, då cykel ej bildas.

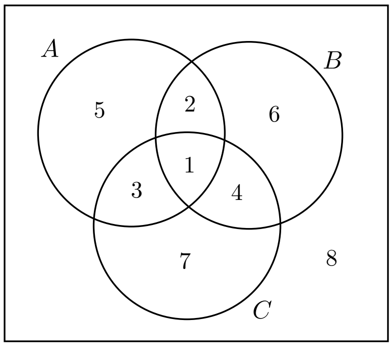
Vi har nu valt 6 bågar och har därmed ett minimalt spännande träd som figuren ovan visar. Total kostnad blir $6 + 6 + 7 + 8 + 12 + 20 = 59$ tusen kronor.

Var god vänd!

Svar: a) Sluten eulerväg finns ej i den ursprungliga grafen men om bågarna (1-2) och (1-4) läggs till så finns det det enligt sats då alla gradtal blir jämna.
b) Se billigaste nätverk ovan. Minimal kostnad blir 59 000 kr.

4. a) $A \cap (B \cup \overline{C}) = A \setminus (C \setminus B)$

Vi använder ett numrerat venndiagram och går igenom operationerna i vänsterled och högerled var för sig, en operation i taget, och visar att likheten gäller.



VL:	HL:
B: 1, 2, 4, 6	C: 1, 3, 4, 7
$\overline{C}$: 2, 5, 6, 8	$C \setminus B$: 3, 7
$B \cup \overline{C}$: 1, 2, 4, 5, 6, 8	A: 1, 2, 3, 5
A: 1, 2, 3, 5	HL= $A \setminus (C \setminus B)$: 1, 2, 5
VL=$A \cap (B \cup \overline{C})$: 1, 2, 5	

Då VL och HL svarar mot samma område i det numrerade venndiagrammet ovan har vi visat att likheten gäller för alla mängder A, B och C.

b) $(\overline{B} \cap C) \setminus \overline{A} = (C \cap A) \setminus \overline{B}$

Likheten gäller ej och vi ger ett konkret motexempel.

Låt $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$, $A = B = C = \{a\}$. Vi beräknar vänster- och högerled.

VL= $(\overline{B} \cap C) \setminus \overline{A} = (\overline{\{a\}} \cap \{a\}) \setminus \overline{\{a\}} = (\{b, c\} \cap \{a\}) \setminus \{b, c\} = \emptyset \setminus \{b, c\} = \emptyset$.

HL= $(C \cap A) \setminus \overline{B} = (\{a\} \cap \{a\}) \setminus \overline{\{a\}} = \{a\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$.

Då VL och HL ger olika mängder i vårt exempel ovan så gäller inte likheten för alla mängder A, B och C.

Svar: a) Likheten gäller, se bevis ovan.
b) Likheten gäller ej, se motexempel ovan.

5. a) Vi ska köpa 10 färgpennor i de fyra färgerna svart, blå, grön och röd. Då vi får upprepa samma färg och ordningen ej spelar roll, så är det en kombination med upprepning, alltså ett staketproblem. Med fyra färger får vi tre "staket". 10 pennor som ska väljas plus 3 staket ger 13 objekt bland vilka vi väljer plats för de tre staketen. Det ger:

$\binom{10+3}{3} = \binom{13}{3} = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = \mathbf{286}$.

b) På hur många sätt kan detta göras om du vill ha minst en av varje färg och högst tre svarta?

Ta först en penna av varje färg, då återstår 6 pennor som ska väljas. Vi räknar ut på hur många sätt detta kan göras och drar sedan bort antalet bland dessa som innehåller fler än tre svarta. Antalet med minst en av varje blir på motsvarande sätt som ovan $\binom{6+3}{3} = \binom{9}{3} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = \mathbf{86}$.

Var god vänd!

För att dra bort dem av dessa som innehåller fler än tre svarta så tar vi först en av varje färg samt ytterligare tre svarta så att vi har totalt 4 svarta. Då återstår att välja 3 pennor och alla dessa kombinationer kommer innehålla fler än 3 svarta och det kan på samma sätt som ovan göras på $\binom{3+3}{3} = \binom{6}{3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{20}$ sätt.

Sammanlagt fås då $86 - 20 = \mathbf{66}$ kombinationer med en av varje färg och högst tre svarta.

Svar: a) Det finns 286 olika färgkombinationer för 10 pennor bland 4 färger.
b) 66 kombinationer innehåller av av varje färg och högst tre svarta.

6. Vi visar med hjälp av induktion att $4 \mid 6^n - 2^n$ för alla positiva heltal n.

1.) Visa att 4 delar $6^n - 2^n$ för $n = 1$: Med $n = 1$ insatt får vi talet $6^1 - 2^1 = 4$ och då 4 delar 4 gäller påståendet för $n = 1$.

2.) Antag att påståendet gäller för något $n = p$, det vill säga att $4 \mid 6^p - 2^p$.

Visa att då gäller också påståendet för $n = p + 1$, alltså att $4 \mid 6^{p+1} - 2^{p+1}$.

Vi startar med uttrycket för $p+1$ och visar att det är delbart med 4 under antagandet att det gäller för $n = p$. Att $4 \mid 6^p - 2^p$ kan också uttryckas som att $6^p - 2^p = 4 \cdot k$, för något heltal k. Detta kan i sin tur skrivas som att $6^p = 4k + 2^p$. Vi får:

$6^{p+1} - 2^{p+1} = 6 \cdot 6^p - 2 \cdot 2^p = 6 \cdot (4k + 2^p) - 2 \cdot 2^p = 24k + 6 \cdot 2^p - 2 \cdot 2^p = 24k + 4 \cdot 2^p = 4 \cdot (6k + 2^p)$ och då $6k + 2^p$ är ett heltal för varje heltal k och p, så följer att $6^{p+1} - 2^{p+1}$ kan skrivas som 4 gånger något heltal. Detta är precis definitionen av att $4 \mid 6^{p+1} - 2^{p+1}$, vilket skulle visas.

1.) och 2.) ovan visar tillsammans att $4 \mid 6^n - 2^n$ för alla positiva heltal n, enligt induktionsprincipen.

Svar: Se induktionsbevis ovan.

7. Vi bildar alla möjliga bokstavsföljder med samtliga sex bokstäver K L R V Å Ö. Det finns 720 olika sådana bokstavsföljder. Vi skriver upp dessa följder i bokstavsordning. På vilken plats i ordningen kommer ordet VÅRLÖK ?

Högst upp i listan med alla ord finns de som börjar på K. Antalet ord som börjar på K fås genom att permutera de 5 bokstäver som finns efter K, vilket går att göra på 5! sätt, d v s 120 sätt. Det finns alltså 120 ord som börjar på K. På samma sätt finns det 120 ord som börjar på L och 120 ord som börjar på R. Sammanlagt 360 ord så här långt.

Nästa ord (nr 361) är det första som börjar på V. Bland de som börjar på V måste de första börja på VK och antalet sådan fås genom att omordna de 4 bosktäver som står efter VK, nämligen L, R, Å och Ö, vilket då kan göras på 4! sätt, så det finns 4!=24 ord som börjar på VK. Enligt samma idé finns det sedan 24 ord som börjar på VL, och 24 som börjar på VR, totalt alltså $3 \cdot 24 = 72$ som börjar på V, innan vi kommer fram till VÅ.

De första på VÅ startar på VÅK och blir enligt samma princip 3!=6 st. Därefter följer de som börjar på VÅL och de är 3!=6 st.

Hittills har vi alltså passerat $120 + 120 + 120 + 72 + 6 + 6 = 444$ ord. Nu är vi framme vid VÅR... och vi kan lista orden som börjar på VÅR i bokstavsordning.

Var god vänd!

Vi får:

445 VÅRKLÖ
446 VÅRKÖL
447 VÅRLKÖ
448 VÅRLÖK
449 VÅRÖKL

.

.

Vi ser att ordet VÅRLÖK kommer på plats 448.

Svar: Ordet VÅRLÖK står på plats 448 när alla bokstavsföljder skrivs i bokstavsordning.