

## Tentamen

### TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp

### 2023-01-11 kl. 14-19

På varje uppgift ges 3 poäng. För betyg 3 krävs minst 8p, för betyg 4 krävs minst 12p och för betyg 5 krävs minst 16p. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

**Tillåtna hjälpmedel:** Bifogat formelblad i logik. (Räknare ej tillåten.)

Lösningar läggs ut på kurswebbsidan efter skrivtidens slut.

---

1. a) Låt  $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 12\}$  och Låt  $A$  vara mängden av alla udda tal i  $\mathcal{U}$  och  $B$  vara mängden av alla tal i  $\mathcal{U}$  som är delbara med 3. Bestäm  $\bar{A} \cap B$  och ange antalet delmängder till denna mängd.  
b) Avgör om följande likhet gäller för alla mängder  $A$ ,  $B$  och  $C$ . Ge bevis om den gäller respektive motexempel, med högst tre element i grundmängden, om den inte gäller.

$$A \cap (B \setminus \bar{C}) = (B \cap C) \setminus A$$

2. a) Rita grafen  $K_5$  (den kompletta grafen med 5 noder) samt ange dess komplementgraf.  
b) Finns det någon sluten respektive öppen eulerväg i  $K_5$ ? Ge exempel om den finns eller motivera varför sådan inte finns för respektive vägtyp.  
c) En annan graf är ett träd och innehåller fem noder av grad 4 samt ett visst antal löv. Bestäm utifrån givna satser hur många löv grafen har.

3. På en teater kostade biljetterna 200:- för barn och 320:- för vuxna. Totalt fick teatern in 12 000:- vid en viss föreställning.

- a) Ange den diofantiska ekvation uppgifterna ger upphov till samt bestäm samtliga lösningar till denna ekvation.
- b) Bestäm hur många barn respektive vuxna som var på teatern om man vet att det var minst 15 barn och mer än 20 vuxna.



4. a) Avgör om  $\neg(p \wedge q)$  är logiskt ekvivalent med  $q \rightarrow \neg p$  eller ej.  
b) Visa följande slutledning med någon metod i kursen eller ge ett motexempel om den inte gäller:

$$(s \vee r) \wedge (p \rightarrow q) \wedge \neg q \wedge (\neg p \rightarrow \neg s) \Rightarrow r$$

5. a) Bestäm antalet olika sifferföljder om 8 siffror som man kan bilda genom att omordna siffrorna i dagens datum: 20230111. (Till exempel 01121320.)  
b) I hur många av följderna i a) står inte två 1:or intill varandra?

Var god vänd!

6. Bestäm värdena på konstanterna  $a$  och  $b$  så att likheten nedan gäller för  $n = 3$  och  $n = 4$ . Redovisa lösningen av det ekvationssystem du får. Bevisa sedan med induktion att likheten gäller för alla  $n \geq 3$  med dessa värden på  $a$  och  $b$ .

$$\sum_{k=3}^n \frac{k(k+1)}{2} = a \cdot n(n+1)(n+2) + b, \quad n \geq 3.$$

7. a) En enkel och sammanhängande graf  $G$  har  $n$  noder och  $m$  bågar. Ange ett uttryck i  $n$  och  $m$  för hur många bågar som måste tas bort för att få ett spännande träd till  $G$ .
- b) Jämför nu Kruskals algoritm med kantborttagning för en enkel och sammanhängande graf med  $n$  noder. För vilket antal bågar (uttryckt i  $n$ ) i den ursprungliga grafen är det effektivare att använda Kruskals algoritm än kantborttagning, det vill säga för vilket antal bågar får vi färre att välja till med Kruskals än vi tar bort i kantborttagning?