Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Transformmetoder. TAIU04/TEN1, 2014-08-19, kl 8-12.

Hjälpmedel: Formelsamling som bifogas tentan. Inga andra hjälpmedel , ej miniräknare.
Poängbedömning: 0-3 poäng per uppgift.
Godkännande: För betygen n krävs 3n-1 poäng , n=3,4,5.
Svar: Lösningsskiss till tentan kommer att läggas ut på kursens hemsida.

1. Funktionen $f(t)$ är 2π−periodisk och för $|t| \leq \pi$ ges av $f(t) = |t|$. Rita dess graf och utveckla den i en fourierserie på cosinus-sinus form.

2. Lös differensekvationen
$$4y(k-3) - 3y(k-1) - y(k) = 0$$
med begynnelsevillkor $y(0) = 0, y(1) = 2$ och $y(2) = 1$.

3. Lös ekvationen
$$y'''(t) + 3y''(t) - 4y(t) = 3$$
med begynnelsevillkor $y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = -2$.

4. Rita upp funktionen
$$f(t) = (\cos t)(\Theta(t + \frac{\pi}{2}) - \Theta(t - \frac{\pi}{2}))$$
där
$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$
och Fouriertransformera den!

5. Laplacetransformera den 2-periodiska funktionen $f(t)$ som för $0 \leq t < 2$ ges av
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 \leq t \leq 1, \\ -1 & \text{för } 1 < t < 2. \end{cases}$$

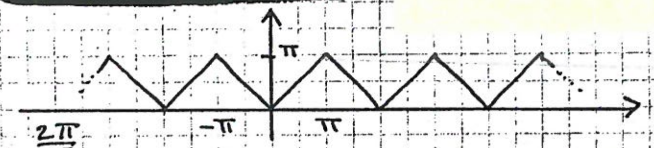
6. Motivera varför följande integral existerar samt beräkna den
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(4+\omega^2)^2}.$$

7. Bestäm Z-transformen till följden
$$x(k) = \frac{k+1}{k!} \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Kortfattade lösningsförslag till tentamen

Transformmetoder

1.



$f(t)$ jämn

cosinusserie.

$\Omega = \frac{2\pi}{T}$

$$a_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt \underset{\substack{p.i\\ n\neq 0}}{=} \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[\frac{\sin nt}{n}t\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{n}\,dt =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Svar: $\left\{ f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1,2,}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)\cos nt \right.$

2. Z-transf. ger.

$$4(z^{-3}Y(z) + z^{-2}y(-1) + z^{-1}y(-2) + y(-3)) - 3(z^{-1}Y(z) + y(-1)) - Y(z) = 0$$

$k=2$ ger $y(-1) = \frac{7}{4}$

$k=1$ ger $y(-2) = \frac{1}{2}$

$k=0$ ger $y(-3) = \frac{21}{16}$

$$Y(z) = z\cdot\frac{2z+7}{z^3+3z^2-4} = z\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} - \frac{1}{(z+2)^2}\right)$$

Svar: $\left\{ y(k) = 1 - (-2)^k + \frac{1}{2}k(-2)^k \right.$

3. Laplace-transf ger

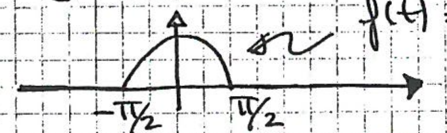
$$s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) + 3(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - 4Y(s) = \frac{3}{s}$$

$$Y(s) = \frac{3+2s^2+4s}{s(s-1)(s+2)^2}$$

$$Y(s) = \frac{-\frac{3}{4}}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{\frac{1}{4}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2}$$

Svar: $\left\{ y(t) = -\frac{3}{4} + e^{t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} \right.$

4.



$f(t) = \cos t\,(\theta(t+\frac{\pi}{2}) - \theta(t-\frac{\pi}{2}))$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t(\cos\omega t - j\sin\omega t)\,dt$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\cos t\cos\omega t\,dt = \int_0^{\pi/2}(\cos(1+\omega)t + \cos(1-\omega)t)\,dt$$

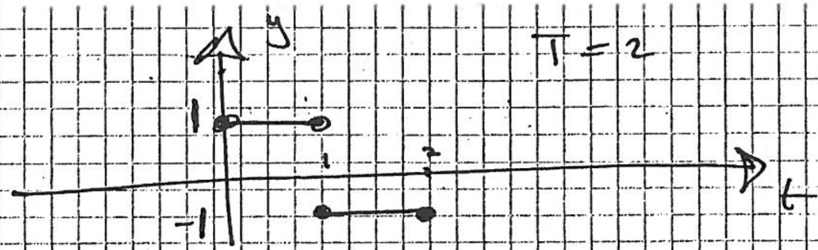
$$= \left[\frac{\sin(1+\omega)t}{1+\omega} + \frac{\sin(1-\omega)t}{1-\omega}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\sin(1+\omega)\frac{\pi}{2}}{1+\omega} + \frac{\sin(1-\omega)\frac{\pi}{2}}{1-\omega} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1+\omega} + \frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega} = \frac{2\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega^2}$$

Svar: $\hat{f}(\omega) = \frac{2\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega^2}$

5. $T = 2$



$$g(t) = f(t) - f(t-T)\theta(t-T)$$

$$G(s) = F(s) - e^{-Ts}F(s)$$

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}G(s)$$

$$G(s) = \int_0^2 g(t)e^{-st}dt = \int_0^1 e^{-st}dt + \int_1^2 -e^{-st}dt$$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1 + \left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{e^{-s}}{-s} + \frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1}{s}\left(e^{-2s} - 2e^{-s} + 1\right)$$

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \cdot \frac{1}{s}\left(e^{-s}-1\right)^2 = \frac{\left(e^{-s}-1\right)^2}{s(1-e^{-2s})}$$

Svar: $F(s) = \dfrac{\left(e^{-s}-1\right)^2}{s(1-e^{-2s})}$

6. $$0 < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(4+\omega^2)^2} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2}d\omega = \left[\arctan\omega\right]_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

alltså konvergent enligt jämförelsesatsen.

Plancherels formel.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(\omega))^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

där $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{4+\omega^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$

F4 och F19 ger $f(t) = \frac{1}{4}e^{-|2t|}$

Plancherels samt lite räkningar ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(4+\omega^2)^2} = \frac{\pi}{16}.$$

Svar: $\dfrac{\pi}{16}$

7. $X(k) = ky(k) + y(k)$ där $y(k) = \dfrac{1}{k!}$

Z 17 ger $Y(z) = e^{\frac{1}{z}}$

Enl. E7 är $X(z) = -z\dfrac{d}{dz}Y(z) + Y(z) =$

$$= -z\left(e^{\frac{1}{z}}\right)' + e^{\frac{1}{z}} = -z\,e^{\frac{1}{z}}\left(-\frac{1}{z^2}\right) + e^{\frac{1}{z}} = \frac{z+1}{z}e^{\frac{1}{z}}$$

Svar: $X(z) = \dfrac{z+1}{z}e^{\frac{1}{z}}$