Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Transformmetoder. TAIU04/TEN1, 2014-10-21, kl 14-18.

Hjälpmedel: Formelsamling som bifogas tentan. Inga andra hjälpmedel , ej miniräknare.
Poängbedömning: 0-3 poäng per uppgift.
Godkännande: För betygen n krävs 3n-1 poäng , n=3,4,5.
Svar: Lösningsskiss till tentan kommer att läggas ut på kursens hemsida.

1.

(2p) a) Utveckla $f(t) = 1 - |t|, -1 \leq t \leq 1$, i Fourierserie med period 2.

(1p) b) Använd resultatet för att räkna ut

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

(3p) 2. Bestäm $y(k), k = 0, 1, 2, \ldots$ så att $y(k) = 2y(k-1) - y(k-2) - 3^k$, för $k = 0, 1, 2, \ldots$ samt $y(0) = -1, y(1) = -4$.

(3p) 3. Rita upp funktionen $f(t) = e^{-|t|}$ och Fouriertransformera den utan transformlexikon. Dvs bevisa $F19$ genom att använda definitionen.

4. Den linjära pulsen $f(t)$ är definierad enligt följande:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{om} \quad 0 \leq t < 1 \\ t - 1 & \text{om} \quad 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

(1p) a) Uttryck $f(t)$ med hjälp av Heavisides $\theta-$funktion.

(2p) b) Beräkna Laplacetransformen av $f(t)$

(3p) 5. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x''(t) + x'(t) + 2y'(t) = 0 \\ 2x''(t) + 4y'(t) - 2y(t) = 0 \end{cases}$$

där $x(0) = 0$ och $y(0) = -1$ samt $x'(0) = 1$.

(3p) 6. Bestäm Laplacetransformen av den periodiska funktionen $f(t) = |\sin 2t|$.

7.

(1p) a) Bestäm först Fouriertransformen till funktionen

$$f(t) = te^{-2|t|}$$

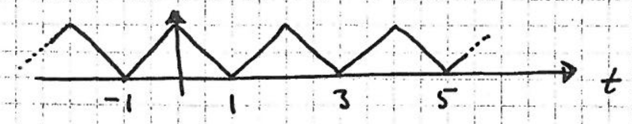
(2p) b) Använd sedan resultatet till att exakt beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+4)^2} dx$$

Kortfattade lösningsförslag till tentamen

Transformmetoder **TAIU04/TEN1, 2014-10-21, kl 14-18.**

1. a.



$T = 2$

$\Omega = \pi$

f jämn $\Rightarrow$ alla $b_n = 0$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^1 (1-t)\cos n\pi t \, dt = 2\int_0^1 (1-t)\cos n\pi t \, dt =$$

$$\underset{n\neq 0}{=} 2\left(\underbrace{\left[(1-t)\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (-1)\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\,dt\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos n\pi t}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{n^2\pi^2}\left(1-\cos n\pi\right) =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & , n \text{ jämn} \\ \frac{4}{n^2\pi^2} & , n \text{ udda} \end{cases}$$

$$a_0 = 2\int_0^1 (1-t)\,dt = 2\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)^2\pi^2}\cos n\pi t$

1 b.

$$\underbrace{f(0)}_{=1} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)^2\pi^2}\cos 0$$

Svar: $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

2. $y(k) = 2y(k-1) - y(k-2) - 3^k$

$k=1$ ger $-4 = -2 - y(-1) - 3$

$y(-1) = -1$

$k=0$ ger $-1 = -2 - y(-2) - 1$

$y(-2) = -2$

$$Y(z) = 2\left(z^{-1}Y(z) + y(-1)\right) - \left(z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)\right) - \frac{z}{z-3}$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = \cancel{-2} + \frac{1}{z} \cancel{+2} - \frac{z}{z-3}$$

$$Y(z)\left(z^2 - 2z + 1\right) = z - \frac{z^3}{z-3}$$

$$Y(z) = \frac{z^2 - 3z - z^3}{(z-3)(z-1)^2} = z\,\frac{z-3-z^2}{(z-3)(z-1)^2} =$$

$$= z\left(\frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}\right) =$$

$$= z\left(\frac{-\frac{9}{4}}{z-3} + \frac{\frac{5}{4}}{z-1} + \frac{\frac{3}{2}}{(z-1)^2}\right) \supset$$

$$\subset -\frac{9}{4}\cdot 3^k + \frac{5}{4} + \frac{3}{2}k = y(k)$$

Svar: $y(k) = -\frac{9}{4}3^k + \frac{5}{4} + \frac{3}{2}k$.

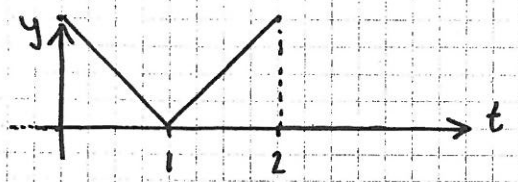
3. $$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underset{j}{e^{-|t|}} (\underset{j}{\cos \omega t} - j \underset{u}{\sin \omega t})\, dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \cos \omega t \, dt =$$

$$= 2 \,\mathrm{Re} \int_0^{\infty} e^{(-1+j\omega)t} dt = 2\,\mathrm{Re} \left[\frac{e^{(-1+j\omega)t}}{-1+j\omega} \right]_0^{\infty} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-j\omega} \right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1+j\omega}{1+\omega^2} \right) = \underline{\underline{\frac{2}{1+\omega^2}}}.$$

4.



a. $f(t) = (1-t)(\theta(t) - \theta(t-1)) + (t-1)(\theta(t-1) - \theta(t-2)) =$

$= (1-t)\theta(t) + 2(t-1)\theta(t-1) - (t-2)\theta(t-2) - \theta(t-2) \supset$

$\supset \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + 2e^{-s} \cdot \frac{1}{s^2} - e^{-2s}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} e^{-2s} = F(s).$

$\uparrow$

$f(t-T)\theta(t-T) \supset e^{-sT} \cdot F(s)$

$1 \supset \frac{1}{s}$

$t \supset \frac{1}{s^2}$

Svar 4b.

5. Laplacetransformering ger.

$$\begin{cases} s^2 X(s) - s\underbrace{x(0)}_{=0} - \underbrace{x'(0)}_{=1} + s X(s) - \underbrace{x(0)}_{=0} + 2(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=-1}) = 0 \\ 2(s^2 X(s) - s\underbrace{x(0)}_{=0} - \underbrace{x'(0)}_{=1}) + 4(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=-1}) - 2Y(s) = 0 \end{cases}$$

$(s^2+s)X(s) + 2sY(s) = -1$ $\quad 2s$

$2s^2 X(s) + (4s-2)Y(s) = -2$ $\quad s+1$

Sedan subtraktion.

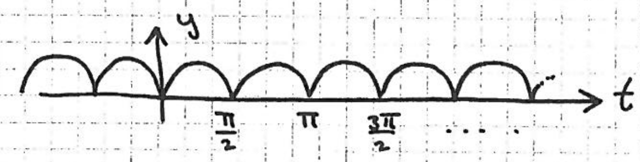
$(\cancel{4s^2} - \cancel{4s^2} - 2s + 2)Y(s) = -\cancel{2s} + \cancel{2s} + 2$

$Y(s) = \frac{2}{2-2s} = \frac{1}{1-s} = \frac{-1}{s-1} \supset -e^t = y(t)$

och $x(t) = e^t - 1$

Svar: $\begin{cases} x(t) = e^t - 1 \\ y(t) = -e^t \end{cases}$

6.



$g(t) = f(t) - f(t - \frac{\pi}{2})\theta(t - \frac{\pi}{2})$

$G(s) = F(s) - F(s) e^{-\frac{s\pi}{2}}$

$G(s) = \int_0^{\pi/2} \sin 2t \, e^{-st} dt = \dots$ p.i 2ggr flytta över.

Svar: $F(s) = \frac{1}{1-e^{-\frac{s\pi}{2}}} \cdot \frac{2(1+e^{-\frac{s\pi}{2}})}{s^2+4}$

7. a. $e^{-|t|} \supset \frac{2}{1+\omega^2}$

F04 $e^{-2|t|} \supset \frac{1}{2} \frac{2}{1+(\frac{\omega}{2})^2} = \frac{4}{4+\omega^2}$

F12 $-jt\, f(t) \supset \hat{f}^{(1)}(\omega)$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{4}{4+\omega^2}\right) = \frac{-8\omega}{(4+\omega^2)^2}$$

$$t f(t) \supset \frac{1}{-j} \frac{d}{d\omega}(\hat{f}(\omega))$$

$$t e^{-2|t|} \supset \frac{8\omega}{j(4+\omega^2)^2} = \frac{-8j\omega}{(4+\omega^2)^2}$$

7 b. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \sin \omega}{(\omega^2+4)^2} d\omega = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{8\omega}{j(4+\omega^2)^2} e^{j\omega} d\omega =$$

$$= \frac{1}{8} 2\pi f(1) = \frac{\pi}{4} e^{-2} = \frac{\pi}{4e^2}$$

F02

Svar: $\underline{\underline{\frac{\pi}{4e^2}}}$