**Linköpings universitet**
Magnus Berggren, MAI

## Tentamen i Transformmetoder. TAIU04/TEN1, 2015-06-01, kl 14-18.

**Hjälpmedel:** Formelsamling som bifogas tentan. Inga andra hjälpmedel , ej miniräknare.
**Poängbedömning:** 0-3 poäng per uppgift.
**Godkännande:** För betygen n krävs 3n-1 poäng , n=3,4,5.
**Svar:** Lösningsskiss till tentan kommer att läggas ut på kursens hemsida.

1. Lös följande differensekvation

$$2y(k) = y(k-1) + y(k-2) \quad , \quad k = -2, -1, 0, 1 \ldots$$

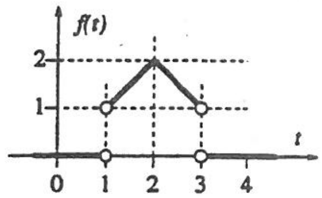
med $y(0) = 1$ och $y(1) = 3$

2. Vi vet att Fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 1 - \omega, & |\omega| \leq 1, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Finn $f(t)$.

3. Uttryck följande linjära puls med hjälp av Heaviside $\theta$-funktion och Laplacetransformera den.




4. Lös följande differentialekvation för $t \geq 0$

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = -1,$$

där $\delta(t)$ är Diracs delta-funktion.

5. a) Funktionen $f(t)$ är 4-periodisk, jämn och för $0 \leq t \leq 2$ gäller

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Rita dess graf i intervallet $-4 \leq t \leq 4$ och utveckla $f(t)$ i en fourier-serie på cosinus-sinus form.

b) Beräkna summan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

6. Vi vet att Fouriertransformen $f(t) \supset \hat{f}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$. Beräkna Fouriertransformen av $t^2 f''(t)$.

7. En funktion $f(x)$ är definierad genom potensserien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)x^k}{k!}.$$

Uttryck $f$ utan potensserie. (med elementära funktioner)

# Kortfattade lösningar till Transformer

# TAIU04. / TEN1

# 2015-06-01

1. $Z$-transf ger

$$2Y(z) = z^{-1}Y(z) + \underbrace{y(-1)}_{=5} + z^{-2}Y(z) + z^{-1}\underbrace{y(-1)}_{=5} + \underbrace{y(-2)}_{=-3}$$

$k=1$ ger $2y(1) = y(0) + y(-1) \Rightarrow y(-1) = 5$

$k=0$ ger $2y(0) = y(-1) + y(-2) \Rightarrow y(-2) = -3$

$$Y(z)\left(2 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) = 2 + \frac{5}{z}$$

$$Y(z)\left(2z^2 - z - 1\right) = 2z^2 + 5z$$

$$Y(z) = z\,\frac{2z+5}{(z-1)(2z+1)} = z\left(\frac{\frac{7}{3}}{z-1} + \frac{-\frac{8}{3}}{2z+1}\right)$$

Svar: $\underline{y(k) = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k}$ utför kontroll.

2. $$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\Bigg(\underbrace{\int_{-1}^{1} e^{j\omega t}\, d\omega}_{=\mathrm{I}.} - \underbrace{\int_{-1}^{1}\omega e^{j\omega t}\, d\omega}_{=\mathrm{II}.}\Bigg)$$

I. $$\int_{-1}^{1}(\underbrace{\cos\omega t}_{\text{jämn}} + j\underbrace{\sin\omega t}_{\text{udda}})\, d\omega = 2\left[\frac{\sin\omega t}{t}\right]_0^1 = \frac{2\sin t}{t}$$

II. $$\int_{-1}^{1}\underbrace{\omega}_{\text{udda}}(\underbrace{\cos\omega t}_{\text{jämn}} + j\underbrace{\sin\omega t}_{\text{udda}})\, d\omega = 2j\int_0^1 \omega\sin\omega t\, d\omega \underset{p.i}{=}$$

forts nr 2.

$$= 2j\left(\left[-\frac{\omega\cos\omega t}{t}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos\omega t}{t}\, dt\right) =$$

$$= -\frac{2j\cos t}{t} + 2j\left[\frac{\sin\omega t}{t^2}\right]_0^1 = -2j\frac{\cos t}{t} + 2j\frac{\sin t}{t^2}$$

Svar: $\underline{f(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\sin t}{t} + 2j\frac{\cos t}{t} - 2j\frac{\sin t}{t^2}\right)}$.

3. $$f(t) = t\left(\theta(t-1) - \theta(t-2)\right) + (4-t)\left(\theta(t-2) - \theta(t-3)\right)$$

$$= (t-1)\theta(t-1) + \theta(t-1) - 2(t-2)\theta(t-2) + (t-3)\theta(t-3)$$

$$-\theta(t-3) \supset \frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-s} - 2\frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-3s}$$

$$-\frac{1}{s}e^{-3s}$$

Svar: $\underline{F(s) = \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)e^{-s} + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)e^{-3s} - \frac{2}{s^2}e^{-2s}}$

4. Laplacetransf. ger.

$$s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=1} - \underbrace{y'(0)}_{=-1} + 2\big(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=1}\big) + 5Y(s) = e^{-\pi s}$$

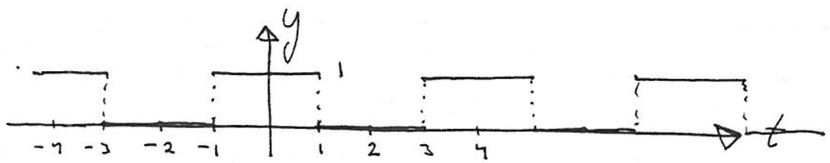
$$Y(s)\left(s^2 + 2s + 5\right) = e^{-\pi s} + s - 1 + 2$$

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+5} + \frac{s+1}{s^2+2s+5} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4}e^{-\pi s} + \frac{s+1}{(s+1)^2+4} \subset$$

$$\subset = \underline{\left(\frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}\sin 2(t-\pi)\right)\theta(t-\pi) + e^{-t}\cos 2t = y(t)} \;:\text{Svar}$$

5. a.



$\Omega = \frac{2\pi}{T}$ Ren cosinusserie. Alltså $b_n = 0$.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos n\Omega t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 1\cdot\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt = \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^1 = \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}. \quad n \neq 0$$

$$a_0 = \int_0^1 1\cdot dt = [t]_0^1 = 1$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}$

b. $t = 0$ ger

$$\underbrace{f(0)}_{=1} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots}_{=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}}\Big)$$

Svar: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

6. $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$

$f(t) \supset \hat{f}(\omega)$

F11 $\quad f''(t) \supset (j\omega)^2\hat{f}(\omega) = \frac{-\omega^2}{1+\omega^2}$

$$t^2 f''(t) \underset{F12}{\supset} -\frac{d^2}{d\omega^2}\left(-\frac{\omega^2}{1+\omega^2}\right) = \frac{d^2}{d\omega^2}\left(1 - \frac{1}{1+\omega^2}\right)$$

$$= \frac{d}{d\omega}\left(\frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2}\right) = 2\left(\frac{(1+\omega^2)^{\cancel{2}} - 2\omega\cancel{(1+\omega^2)}\cdot 2\omega}{(1+\omega^2)^{\cancel{4}\,3}}\right) =$$

$$= 2\,\frac{1-3\omega^2}{(1+\omega^2)^3} = \frac{2-6\omega^2}{(1+\omega^2)^3}$$ Svar:

7. $s''(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)x^k}{k!}$ $\qquad f(x) = s''(x)$.

$s'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)x^{k+1}}{k!}$

$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+2}}{k!} = x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = x^2\underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} \ldots\right)}_{=e^x}$

$s(x) = x^2 e^x$

$s'(x) = (x^2+2x)e^x$

Svar: $s''(x) = (x^2+4x+2)e^x$.