Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Transformmetoder. TAIU04/TEN1, 2015-10-20, kl 14-18.

Hjälpmedel: Formelsamling som bifogas tentan. Inga andra hjälpmedel , ej miniräknare.
Poängbedömning: 0-3 poäng per uppgift.
Godkännande: För betygen n krävs 3n-1 poäng , n=3,4,5.
Svar: Lösningsskiss till tentan kommer att läggas ut på kursens hemsida.

1. Beräkna Fouriertransformen av

$$f(t) = (1-|t|)(\theta(t+1)-\theta(t-1)) \text{ där } \theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

2. Bestäm $y(k)$, $k = 0, 1, 2, ...$ så att $y(k) = \frac{1}{2}(y(k-2) - y(k-1))$ för $k = 0, 1, 2, ...$ samt $y(-1) = 1$ och $y(-2) = 0$.

3. Funktionen $f(t)$ är periodisk med perioden 2π och

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ om } \pi/2 < |t| < \pi \\ 1 \text{ om } |t| \leq \pi/2 \end{cases}$$

Bestäm Fourierserien till $f(t)$ samt beräkna $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

4. Bestäm en funktion som har Laplacetransformen

a) $\dfrac{e^{-2s}}{s^2+s}$

b) $\dfrac{2s+1}{s^2+4s+5}$

c) Visa att om $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ så är $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$.

5. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x''(t) + x'(t) + 2y'(t) = 0 \\ 2x''(t) + 4y'(t) - 2y(t) = 0 \end{cases}$$

där $x(0) = 0$ och $y(0) = -1$ samt $x'(0) = 1$

6. a) Bestäm Z-transformen till följden

$$x(k) = \begin{cases} 1 \text{ för } k = 0, 3, 6, 9, 12, ..., \\ 0 \text{ annars.} \end{cases}$$

För vilka z konvergerar den?

b) Inverstransformera och uttryck $x(k)$ med en formel utan klamrar.

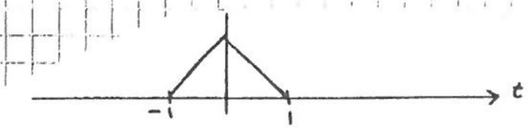
7. Visa att

$$\int_0^{\infty} \frac{2x \sin ax}{1+x^2} dx = \pi \operatorname{sgn}(a) \cdot e^{-|a|}$$

Kortfattade lösningar till tentamen

Transformmetoder. TAIU04/TEN1, 2015-10-20, kl 14-18.

1.



$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot(\cos\omega t - j\sin\omega t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{jämn}}{f(t)\cos\omega t}\,dt - j\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{udda}}{f(t)\sin\omega t}\,dt}_{=0} =$$

$$= 2\int_0^1 (1-t)\cos\omega t\,dt \underset{\text{p.i}}{=}$$

$$= 2\underbrace{\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}(1-t)\right]_0^1}_{=0} - 2\int_0^1 \frac{\sin\omega t}{\omega}(-1)\,dt$$

$$= \frac{2}{\omega}\left[\frac{-\cos\omega t}{\omega}\right]_0^1 = \frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega)$$

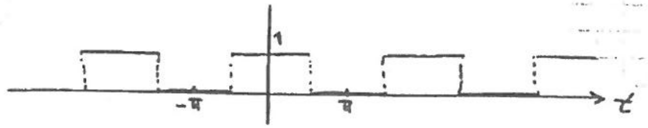
Svar: $\hat{f}(\omega) = \dfrac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}$

2. Z-transformering och förenkling ger

$$Y(z) = \frac{z-z^2}{(z+1)(2z-1)} = -\frac{2}{3}\frac{z}{z+1} + \frac{1}{6}\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

Svar: $y(k) = -\frac{2}{3}(-1)^k + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

3.



$T = 2\pi \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$f(t)$ jämn $\Rightarrow$ ren cosinusserie.

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\Omega t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cdot\cos nt\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1\cdot\cos nt\,dt \underset{n\neq 0}{=} \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ jämnt} \\ \frac{2(-1)^p}{\pi(2p+1)} & n \text{ udda dvs } n = 2p+1 \ ; p=0,1, \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1\,dt = 1$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2(-1)^p}{\pi(2p+1)}\cos(2p+1)t$

Parsevals formel ger

$$\frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot\int_0^{\pi/2} 1^2\,dt = \frac{1}{4}\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^p}{\pi(2p+1)}\right)^2$$

ger $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

4. a. $\dfrac{1}{s^2+s} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{-1}{s+1} \subset 1 - e^{-t}$

$$\frac{e^{-2s}}{s^2+s} \underset{\text{LOS}}{\subset} \theta(t-2) - e^{-(t-2)}\theta(t-2)$$

b. $2\dfrac{s+2}{(s+2)^2+1} - 3\dfrac{1}{(s+2)^2+1} \subset 2e^{-2t}\cos t - 3e^{-2t}\sin t$

5. *Laplacetransformering ger*

$$\begin{cases} s^2 X(s) - 1 + s X(s) + 2(sY(s) + 1) = 0 \\ 2(s^2 X(s) - 1) + 4(sY(s) + 1) - 2Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1} \quad \subset \quad -1 + e^t$$

$$Y(s) = \frac{-1}{s-1} \quad \subset \quad -e^t$$

$$\text{Svar: } \begin{cases} x(t) = -1 + e^t \\ y(t) = -e^t \end{cases}$$

6 a. $$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = 1 + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + \dots =$$

$$= \left/ \begin{array}{c} \text{Geometrisk serie} \\ \text{kvoten} = \frac{1}{z^3} \end{array} \right/ = \frac{1}{1 - \frac{1}{z^3}} = \frac{z^3}{z^3 - 1}$$

b. $$X(z) = z \frac{z^2}{(z-1)(z^2+z+1)} = z\left(\frac{\frac{1}{3}}{z-1} + \frac{\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}}{z^2+z+1} \right)$$

inverstransformering ger

$$x(k) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{2k\pi}{3} .$$

7. $$\int_0^{\infty} \underbrace{\frac{2x \sin ax}{1+x^2}}_{\text{jämn funktion}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \sin ax}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} e^{jax} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\omega}{1+\omega^2} e^{ja\omega} d\omega$$

$$\underset{\text{FOU}}{=} \frac{1}{2} \operatorname{Im} 2\pi f(a) \quad \text{då} \quad \hat{f}(\omega) = \frac{2\omega}{1+\omega^2}$$

sök nu $f(t)$!

F20 ger $f(t) = \frac{-1}{j} e^{-|t|} \operatorname{sgn} t$

V. få:

$$\int_0^{\infty} \frac{2x \sin ax}{1+x^2} dx = \pi \operatorname{Im} \frac{-1}{j} e^{-|a|} \operatorname{sgn} a =$$

$$= \pi \operatorname{sgn} a \, e^{-|a|} \quad \text{V.S.V}$$