Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Transformmetoder. TAIU04/TEN1, 2016-05-31, kl 14-18.

Hjälpmedel: Formelsamling som bifogas tentan. Inga andra hjälpmedel , ej miniräknare.
Poängbedömning: 0-3 poäng per uppgift.
Godkännande: För betygen n krävs 3n-1 poäng , n=3,4,5.
Svar: Lösningsskiss till tentan kommer att läggas ut på kursens hemsida.

1. Funktionen $f(t)$ har perioden 1.
För $0 \le t \le 1$ är $f(t) = 1 - e^{-t}$.
Bestäm den komplexa Fourierserien för $f(t)$.

2. Lös systemet

$$\begin{cases} x(t) - y'(t) - 2y(t) = 0 \\ x'(t) = 3y(t) \end{cases} \quad \text{där} \begin{cases} x(0) = -4 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

3. Vi har en talföljd som är definierad av följande samband:

$$y(k) = y(k-1) + 2y(k-2), \quad y(0) = -1 \text{ och } y(1) = 3.$$

Bestäm $y(k)$.

4. Bestäm en funktion som har Laplacetransformen
a) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+2s+1}$
b) $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s^2+3s+2}$
c) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+2s+5}$.

5. Rita upp funktionen $f(t) = (\sin t)(\theta(t+\pi) - \theta(t-\pi))$ där

$$\theta(t) = \begin{cases} 1\ ;\ t \ge 0 \\ 0\ ;\ t < 0 \end{cases}$$

och Fouriertransformera den!

6. Bestäm först Fouriertransformen till funktionen

$$f(t) = te^{-2|t|}$$

Använd sedan resultatet till att exakt beräkna integralen

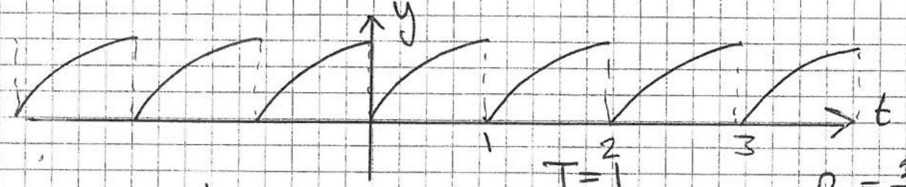
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+4)^2} dx$$

7. Laplacetransformera den 2-periodiska funktionen $f(t)$ som för $0 \le t < 2$ ges av

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 \le t \le 1, \\ -1 & \text{för } 1 < t < 2. \end{cases}$$

Kortfattade lösningsförslag. TAIU04. 2016-05-31

1.



$T = 1$. $\Omega = \frac{2\pi}{T}$

$$c_n = \frac{1}{1}\int_0^1 (1-e^{-t})e^{-jn2\pi t}\,dt =$$

$$\underset{n\neq 0}{=} \left[\frac{e^{-jn2\pi t}}{-jn2\pi} - \frac{e^{-(1+jn2\pi)t}}{-(1+jn2\pi)}\right]_0^1 =$$

$$= \left(\cancel{\frac{e^{-jn2\pi}}{-jn2\pi}} + \frac{e^{-1}\overbrace{e^{-jn2\pi}}^{=1}}{1+jn2\pi} + \cancel{\frac{1}{jn2\pi}} - \frac{1}{1+jn2\pi}\right) =$$

$$= \Big/\ e^{-jn2\pi} = \underbrace{\cos n2\pi}_{=1} - j\underbrace{\sin n2\pi}_{=0}\ \Big/ =$$

$$= \frac{e^{-1}-1}{1+jn2\pi}$$

$$c_0 = \int_0^1 (1-e^{-t})\,dt = \left[t + e^{-t}\right]_0^1 =$$

$$= 1 + e^{-1} - 1 = e^{-1}$$

Svar: $$f(t) = e^{-1} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-1}-1}{1+jn2\pi}e^{jn2\pi t}$$

2. Laplacetransf. ger

$$\begin{cases} X(s) - (sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}) - 2Y(s) = 0 \\ sX(s) - \underbrace{x(0)}_{=-4} = 3Y(s) \end{cases}$$

$X(s) = sY(s) + 2Y(s)$ sätts in i ekv 2

$$s(sY(s) + 2Y(s)) + 4 = 3Y(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 2s - 3) = -4$$

$$Y(s) = \frac{-4}{s^2+2s-3} = \frac{-4}{(s-1)(s+3)} \underset{\text{PBU}}{=}$$

$$= \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s+3} \subset e^{-3t} - e^{t} = y(t)$$

L14 $\quad y'(t) = -3e^{-3t} - e^{t}$

$$x(t) = y'(t) + 2y(t)$$

$$x(t) = -3e^{-3t} - e^{t} + 2e^{-3t} - 2e^{t} = -e^{-3t} - 3e^{t}$$

Svar: $$\begin{cases} x(t) = -e^{-3t} - 3e^{t} \\ y(t) = e^{-3t} - e^{t} \end{cases}$$

3. Z-transf. ger

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + y(-1) + 2\left(z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)\right)$$

$k=1$ ger $\underbrace{y(1)}_{=3} = \underbrace{y(0)}_{=-1} + 2\underbrace{y(-1)}_{=2}$

$k=0$ ger $\underbrace{y(0)}_{=-1} = \underbrace{y(-1)}_{=2} + 2\underbrace{y(-2)}_{=-\frac{3}{2}}$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2}\right) = 2 + \frac{4}{z} - 3$$

$$Y(z)\left(z^2 - z - 2\right) = 4z - z^2$$

$$Y(z) = z\frac{4-z}{(z+1)(z-2)} = \text{PBU}$$

$$= z\left(\frac{-5/3}{z+1} + \frac{2/3}{z-2}\right) =$$

$$= -\frac{5}{3}\frac{z}{z+1} + \frac{2}{3}\frac{z}{z-2} \quad \text{Z08}$$

Svar: $y(k) = -\frac{5}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}\cdot 2^k$

4 a. $F(s) = \frac{s+1-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \sim$

$\sim e^{-t} - te^{-t}$

L14

L13

L04

b. $F(s) = \frac{e^{-3s}}{(s+1)(s+2)} = e^{-3s}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}\right)$

$\sim e^{-(t-3)}\theta(t-3) - e^{-2(t-3)}\theta(t-3)$

L14

L05

c. $F(s) = \frac{s}{s^2+2s+5} = \frac{s+1-1}{(s+1)^2+4} =$

$= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4} \sim$

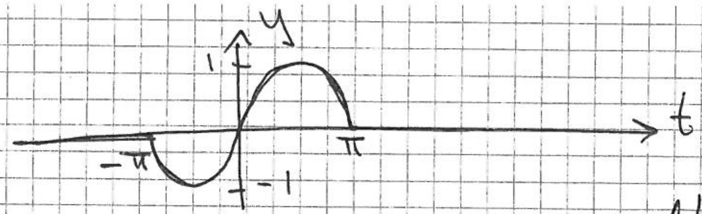
$\sim e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$

L15

L16

L04

5.



Alt. Eulers, i om.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \, e^{-j\omega t} \, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \, (\cos \omega t - j \sin \omega t) \, dt =$$

u j u u = j

$$= 2\int_{0}^{\pi} -j \sin t \sin \omega t \, dt = / \text{formel } 4a / =$$

$$= -j \int_{0}^{\pi} \left(-\cos((1+\omega)t) + \cos((1-\omega)t) \right) dt =$$

$$= -j \left[\frac{-\sin(1+\omega)t}{1+\omega} + \frac{\sin(1-\omega)t}{1-\omega} \right]_{0}^{\pi} =$$

$$= j \left(\frac{\sin(\pi+\pi\omega)}{1+\omega} - \frac{\sin(\pi-\pi\omega)}{1-\omega} \right) =$$

$$= j \left(\frac{-\sin\pi\omega}{1+\omega} - \frac{\sin\pi\omega}{1-\omega} \right) =$$

$$= -j \sin\pi\omega \left(\frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{1-\omega} \right) =$$

$$= -j \sin\pi\omega \left(\frac{1-\cancel{\omega}+1+\cancel{\omega}}{1-\omega^2} \right) =$$

$$= \frac{2j \sin\pi\omega}{\omega^2 - 1}$$

---

6. $f(t) = t e^{-2|t|}$

F19 $\quad e^{-|t|} \supset \dfrac{2}{1+\omega^2}$

F04. $\quad e^{-2|t|} \supset \dfrac{1}{2} \dfrac{2}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{4+\omega^2}$

F12 $\quad -jt e^{-2|t|} \supset \dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{4}{4+\omega^2}\right) = \dfrac{-8\omega}{(4+\omega^2)^2}$

F03. $\quad t e^{-2|t|} \supset \dfrac{-8j\omega}{(4+\omega^2)^2}$.

forts. nr 6.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+4)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{j}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\omega}{(4+\omega^2)^2}}_{u}\Big(\underbrace{\cos\omega}_{j} + j\underbrace{\sin\omega}_{u}\Big)\,d\omega$$

$$= \frac{2\pi}{j}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{(4+\omega^2)^2}e^{j\omega}\,d\omega = \underset{\text{med } t=1}{\text{F02.}}$$

$$= \frac{2\pi}{j}\left(\frac{1\cdot e^{-2\cdot|1|}}{-8j}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi e^{-2}}{4}}}$$

7.

$$g(t) = f(t) - f(t-2)\,\theta(t-2)$$

L05. ger

$$G(s) = F(s) - e^{-2s}F(s)$$

$$F(s) = \frac{G(s)}{1-e^{-2s}}$$

$$G(s) = \int_0^1 1\cdot e^{-st}\,dt + \int_1^2 (-1)e^{-st}\,dt =$$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1 - \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{e^{-s}}{-s} + \frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s} =$$

$$= \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s} = \frac{(e^{-s}-1)^2}{s}$$

Svar: $$\underline{\underline{F(s) = \frac{(e^{-s}-1)^2}{s(1-e^{-2s})}}}$$