Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Transformmetoder. TAIU04/TEN1, 2015-08-18, kl 8-12.

Hjälpmedel: Formelsamling som bifogas tentan. Inga andra hjälpmedel , ej miniräknare.
Poängbedömning: 0-3 poäng per uppgift.
Godkännande: För betygen n krävs 3n-1 poäng , n=3,4,5.
Svar: Lösningsskiss till tentan kommer att läggas ut på kursens hemsida.

1. Lös t ex med hjälp av Laplacetransformer systemet

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) \\ y'(t) = -4x(t) - y(t) + 1 \end{cases} \quad \text{där} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2. Lös differensekvationen

$$y(k) - 3y(k-1) + 2y(k-2) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

där $y(k) = 0$ för $k < 0$.

3. Utveckla funktionen $f(t) = \pi - t$, $0 \le t \le 2\pi$ i en periodisk Fourierserie. Använd resultatet för att beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

4. Beräkna Fouriertransformen av

$$f(t) = (1 - |t|)(\theta(t+1) - \theta(t-1)) \quad \text{där} \quad \theta(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

5. $f(t)$ är en jämn funktion med perioden 2π som i intervallet $0 \le t \le \pi$ är definierad på följande sätt:

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le t \le \pi. \end{cases}$$

Rita grafen till $f(t)$ för $-2\pi \le t \le 2\pi$ och bestäm Fourierserien på cosinus- sinus-form.

6. a) Bestäm den funktion vars fouriertransform är

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 2\omega + 2}.$$

b) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi\omega}{2}}{\omega^2 + 2\omega + 2} \, d\omega.$$

7. Bestäm Z-transformen till följden $x(k) = \dfrac{k+1}{k!}$ $\quad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

Kortfattade lösningar TAIU04 2015-08-18

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 3X(s) + Y(s) \\ sY(s) - y(0) = -4X(s) - Y(s) + \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-3)X(s) = Y(s) & \ldots (1) \\ (s+1)Y(s) = \frac{1}{s} - 4X(s) & \ldots (2) \end{cases}$$

(1) i (2) ger $(s+1)(s-3)X(s) = \frac{1}{s} - 4X(s)$

$$X(s)\left(s^2 - 2s - 3 + 4\right) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+1)} = \frac{1}{s(s-1)^2}$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$x(t) = 1 - e^t + te^t$$

$$Y(s) = \frac{s-3}{s(s-1)^2} = \frac{-3}{s} + \frac{3}{s-1} + \frac{-2}{(s-1)^2}$$

$$y(t) = -3 + 3e^t - 2te^t$$

Svar: $\begin{cases} x(t) = 1 - e^t + te^t \\ y(t) = -3 + 3e^t - 2te^t \end{cases}$

2.

$$Y(z) - 3z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

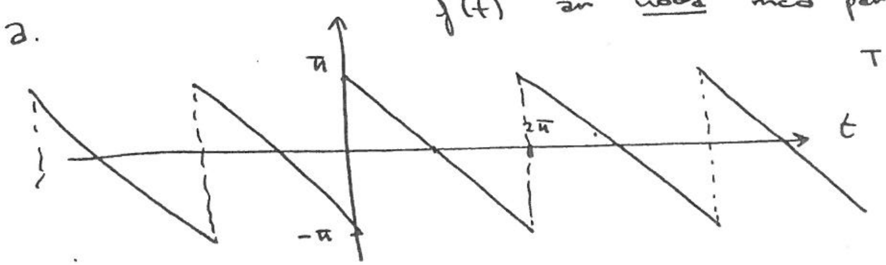
$$Y(z)\left(z^2 - 3z + 2\right) = \frac{z^3}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z^2-3z+2)} = \frac{z^3}{(z-1)(z-1)(z-2)} =$$

$$= z\left[\frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}\right] = z\left[\frac{-1}{(z-1)^2} + \frac{-3}{z-1} + \frac{4}{z-2}\right]$$

Svar: $y(k) = -k - 3 + 4\cdot 2^k$; $k = 0, 1, 2, \ldots$

3. a.



$f(t)$ är udda med perioden 2π.

$T = 2\pi$

$\Omega = \frac{2\pi}{T}$

Ren sinusserie. $\forall\ a_n = 0$.

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\pi} (\pi - t)\sin nt\, dt \underset{p.i}{=}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos nt}{n}(\pi - t)\right]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{n}(-1)\, dt}_{=0}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{2}{n}$$

Svar: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin nt$

b. Parsevals formel ger $\frac{\pi^2}{6}$

4. $\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^{1} (1-|t|)\, e^{-j\omega t}\, dt =$

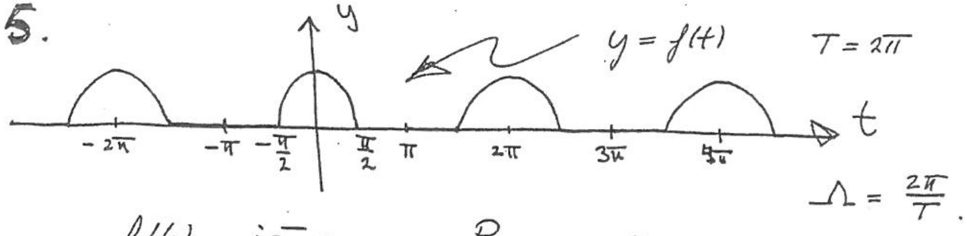
$= \int_{-1}^{1} (1-|t|)(\cos \omega t - j \sin \omega t)\, dt = 2\int_{0}^{1} (1-t) \cos \omega t \, dt =$

$= 2\left(\underbrace{\left[(1-t)\frac{\sin \omega t}{\omega}\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{\sin \omega t}{\omega} dt \right) =$

$= \frac{2}{\omega}\left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^1 = \frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega)$

Svar: $\frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega)$

5.



$\Omega = \frac{2\pi}{T}$.

$f(t)$ jämn : Ren cosinusserie.

alltså $b_n = 0$.

$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t) \cos n\Omega t \, dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\Omega t\, dt =$

$= \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t \cos nt \, dt =$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\cos(1+n)t + \cos(1-n)t \right) dt =$

$\underset{n\neq 1}{=} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1+n)t}{1+n} + \frac{\sin(1-n)t}{1-n} \right]_0^{\pi/2} =$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(1+n)\frac{\pi}{2}}{1+n} + \frac{\sin(1-n)\frac{\pi}{2}}{1-n} \right) =$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2})}{1+n} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{2})}{1-n} \right) =$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{1+n} + \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{1-n} \right) = \frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi(1-n^2)} =$

$= \begin{cases} 0 & \text{för } n = 3, 5, 7, \ldots \\ -\frac{2}{\pi(1-n^2)} & \text{för } n = 2, 6, 10, \ldots \\ +\frac{2}{\pi(1-n^2)} & \text{för } n = 0, 4, 8, 12, \ldots \end{cases}$

$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin 2t}{2} + t \right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}$

Svar: $f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{2}{3\pi}\cos 2t - \frac{2}{15\pi}\cos$

alt. $f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi(1-n^2)} \cos nt$

$\underset{n=2p}{=} \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}\cos 2pt}{\pi(4p^2-1)}$

6.

a) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{(\omega+1)^2+1} = \dfrac{1}{2}\,\hat{g}(\omega+1)$ där $\hat{g}(\omega) = \dfrac{2}{\omega^2+1}$,

dvs. $g(t) = e^{-|t|}$

F8 ger $f(t) = \frac{1}{2} e^{-jt} g(t) = \frac{1}{2} e^{-jt} e^{-|t|}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2}\omega}{\omega^2+2\omega+2}\,d\omega = \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\left(e^{j\frac{\pi}{2}\omega} - e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}\right) d\omega =$

$= \frac{\pi}{j}\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ enl. inversionsformeln

$= \frac{\pi}{j}\left(\frac{1}{2}\underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j} e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{j} e^{-\frac{\pi}{2}}\right) = -\pi \cdot e^{-\frac{\pi}{2}}$

7. $x(k) = k\,y(k) + y(k)$ där $y(k) = \frac{1}{k!}$

Z7 ger $Y(z) = e^{\frac{1}{z}}$

Enl. E7 är $X(z) = -z\frac{d}{dz}Y(z) + Y(z) =$

$= -z\left(e^{\frac{1}{z}}\right)' + e^{\frac{1}{z}} = -z\,e^{\frac{1}{z}}\left(-\frac{1}{z^2}\right) + e^{\frac{1}{z}} = \frac{z+1}{z}\,e^{\frac{1}{z}}$

Svar: $X(z) = \frac{z+1}{z}\,e^{\frac{1}{z}}$