Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Transformmetoder. TAIU04/TEN1, 2016-08-16, kl 8-12.

Hjälpmedel: Formelsamling som bifogas tentan. Inga andra hjälpmedel , ej miniräknare.
Poängbedömning: 0-3 poäng per uppgift.
Godkännande: För betygen n krävs 3n-1 poäng , n=3,4,5.
Svar: Lösningsskiss till tentan kommer att läggas ut på kursens hemsida.

1. Vi vet att Fouriertransformen

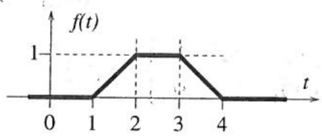
$$\tilde{f}(\omega) = \begin{cases} 1-\omega, & |\omega| \le 1, \\ 0, & \text{för ovrigt.} \end{cases}$$

Finna $f(t)$.

2. Lös följande differensekvation

$$y(n) - 0.2y(n-1) - 0.8y(n-2) = 0; \qquad y(0) = 1, y(1) = 1.$$

3. Uttryck den följande linjära pulsen med hjälp av Heaviside θ-funktion (eller ramp ρ-funktion) och Laplacetransformera den.



4. Funktionen $f(t)$ är periodisk med perioden 2. Vidare är $f(t) = t$ då $-1 < t < 1$. Rita funktionens graf i intervalen $-3 \le t \le 3$ och uttveckla $f(t)$ i en fourierserie på cosinus- sinus form.

5. Lös följande differentialekvationssystemet

$$x'(t) + 3x(t) + y(t) = 0$$
$$y'(t) - y(t) - 8x(t) = \theta(t-8)$$

med Laplacetransform ($\theta(t)$ är Heaviside funktion). Begynnelsevillkor är $x(0) = y(0) = 0$.

6. Vilka av följande serier är konvergenta (bevisa ditt påstående)

$$a) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k} \qquad b) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{k^2}) \qquad c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$$

7. Vi vet att Fouriertransformen $f(t) \supset \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$. Beräkna Fouriertransformen av $t^2 f''(t)$ genom att kombinera lämpliga formler i formelsamling (utan att beräkna $f(t)$).

Kortfattade lösningar TAIU04 **2016-08-16**

1. FO2.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-\omega)e^{j\omega t}\,d\omega =$$

p.i

$$\frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}(1-\omega)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{j\omega t}}{jt}(-1)\,d\omega\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2e^{-jt}}{jt} + \frac{1}{jt}\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-1}^{1}\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2je^{-jt}}{t} - \frac{1}{t^2}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right)\right) =$$

$$\frac{je^{-jt}}{\pi t} - \frac{j}{\pi t^2}\sin t \sim \hat{f}(\omega)$$

2. $n=1$ ger $1 - 0{,}2 - 0{,}8\,y(-1) = 0$

$$\boxed{y(-1)=1}$$

$n=0$ ger $1 - 0{,}2 - 0{,}8\,y(-2) = 0$

$$\boxed{y(-2)=1}$$

Z-transf ger

$$Y(z) - 0{,}2\left(\frac{Y(z)}{z} + 1\right) - 0{,}8\left(\frac{Y(z)}{z^2} + \frac{1}{z} + 1\right) = 0$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{0{,}2}{z} - \frac{0{,}8}{z^2}\right) = 0{,}2 + \frac{0{,}8}{z} + 0{,}8$$

$$Y(z)\left(z^2 - 0{,}2z - 0{,}8\right) = z^2 + 0{,}8z$$

$$Y(z) = z\,\frac{\cancel{z+0{,}8}}{(z-1)\cancel{(z+0{,}8)}} = \frac{z}{z-1} \subset 1$$

Svar: $y(n) = 1$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

3. $$f(t) = (t-1)\big(\theta(t-1) - \theta(t-2)\big) +$$

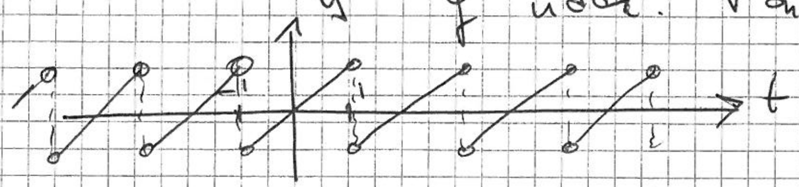
$$1\big(\theta(t-2) - \theta(t-3)\big) + (4-t)\big(\theta(t-3) - \theta(t-4)\big)$$

$$\supset \int_1^2 (t-1)e^{-st}\,dt + \int_2^3 e^{-st}\,dt + \int_3^4 (4-t)e^{-st}\,dt =$$

... osv. Alt. F.R. ... osv.

4. $T = 2$ $\qquad \Omega = \frac{2\pi}{T}$

f udda. $\forall\, a_n = 0$



$$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} t \sin n\pi t\, dt = 2\int_{0}^{1} t \sin n\pi t\, dt =$$

$$\underset{u \quad u' = 1}{}$$

$$2\left(\left[-\frac{\cos n\pi t}{n\pi}\, t\right]_0^1 - \underbrace{\cancel{\int_0^1 -\frac{\cos n\pi t}{n\pi}\, dt}}_{=0}\right) =$$

$$2\left(-\frac{\cos n\pi}{n\pi} - 0\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

Svar: $\displaystyle f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi t.$

5. $\displaystyle \theta(t-8) \supset \int_8^{\infty} 1 \cdot e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_8^{\infty} =$

$$0 + \frac{e^{-8s}}{s}$$

Laplacetransf. ger

$$\begin{cases} sX(s) + 3X(s) + Y(s) = 0 \\ sY(s) - Y(s) - 8X(s) = \dfrac{e^{-8s}}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+3)X(s) + Y(s) = 0 & \ldots (1) \\ -8X(s) + (s-1)Y(s) = \dfrac{e^{-8s}}{s} & \ldots (2) \end{cases}$$

(1) i (2) ger

$$-8X(s) - (s-1)(s+3)X(s) = \frac{e^{-8s}}{s}$$

$$X(s)\left(s^2 + 2s - 3 + 8\right) = -\frac{e^{-8s}}{s}$$

$$X(s) = \frac{-e^{-8s}}{s\left((s+1)^2 + 4\right)} = -e^{-8s}\left(\frac{1/5}{s} + \frac{-\frac{1}{5}s - \frac{2}{5}}{s^2+2s+5}\right.$$

$$X(s) = e^{-8s}\left(\frac{-1/5}{s} + \frac{\frac{1}{5}(s+1)}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{(s+1)^2+4}\right)$$

$$x(t) = -\frac{1}{5}\theta(t-8) + \frac{1}{5}e^{-(t-8)}\cos 2(t-8)\,\theta(t-8) +$$

$$\frac{1}{10}e^{-(t-8)}\sin 2(t-8)\,\theta(t-8)$$

LO5. LO4.

mfl.

$$y(t) = -x'(t) - 3x(t).$$

---

6. a. rotkriteriet ger

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{(\ln k)^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0 < 1$$

Således. Serien <u>konv.</u>

b. $\cos\frac{1}{k^2} \not\to 0$ då $k \to \infty$.

Således. Serien <u>div.</u>

c. kvotkriteriet ger

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{k^2} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(k+1)}k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k^2} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{k}})}{\cancel{k}\cdot k} = 0 < 1.$$

Således. Serien <u>konv</u>

7.

$$f(t) \supset \frac{1}{1+w^2}$$

F11 $$f''(t) \supset (jw)^2 \frac{1}{1+w^2} = \frac{-w^2}{1+w^2}$$

F12 $$(-jt)^2 f''(t) \supset \frac{d^2}{dw^2}\left(\frac{-w^2}{1+w^2}\right)$$

$$t^2 f''(t) \supset \frac{d^2}{dw^2}\left(\frac{w^2}{1+w^2}\right) =$$

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{2w(1+w^2)-2w^3}{(1+w^2)^2}\right) = \frac{d}{dw}\left(\frac{2w}{(1+w^2)^2}\right) =$$

$$\frac{2(1+w^2)^2 - 2w\,2(1+w^2)2w}{(1+w^2)^4} =$$

$$\frac{2(1+w^2)-8w^2}{(1+w^2)^3} = \frac{2-6w^2}{(1+w^2)^3}$$