Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Transformmetoder. TAIU04/TEN1, 2017-06-02, kl 14-18.

Hjälpmedel: Formelsamling som bifogas tentan. Inga andra hjälpmedel , ej miniräknare.
Poängbedömning: 0-3 poäng per uppgift.
Godkännande: För betygen n krävs 3n-1 poäng , n=3,4,5.
Svar: Lösningsskiss till tentan kommer att läggas ut på kursens hemsida.

1. $f(t)$ är en jämn periodisk funktion med perioden 6. Vidare gäller att $f(t) = 4t - 4$ om $0 \le t \le 3$.

   a) Rita $f(t)$ för $-6 \le t \le 6$ och beräkna $f(100)$

   b) Utveckla $f(t)$ i Fourierserie på cosinus-sinusform

2. Lös differensekvationen

   $y(k) = y(k-1) + 2y(k-2)$

   med begynnelsevillkor $y(0) = -1$, $y(1) = 3$.

3. Lös ekvationen $y'''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4e^{-t}$

   med begynnelsevillkor $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$, $y''(0) = -2$.

4. Funktionen $f(t)$ definieras genom

$$f(t) = \begin{cases} 3 & \text{för } 0 \le t < 1, \\ 4 - t & \text{för } 1 \le t < 4, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

   Rita dess graf, skriv den med hjälp av heavisidefunktionen och laplacetransformera den.

5. a) Fouriertransformera funktionen

   $f(t) = \theta(t+1) - \theta(t-1)$,

   där $\theta(t)$ är heavisidefunktionen.

   b) Fouriertransformera funktionen

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{för } 2 \le |t| \le 4, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

   t ex genom att använda resultatet från a).

6. Bestäm Laplacetransformen av funktionen $f(t) = |\sin t \cos t|$.

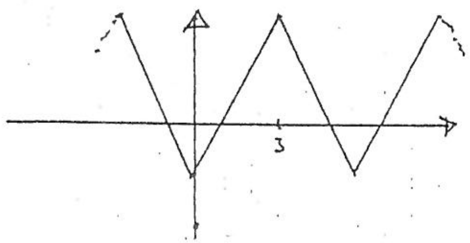
7. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2t \cos t}{t} dt.$$

2017-06-02, kl 14-18.

Transformmetoder. TAIU04/TEN1,

Lösningar.



$T = 6 \qquad \Omega = \frac{2\pi}{6}$

f jämn.

alla $b_n = 0$.

$$f(100) = f(6 \cdot 16 + 4) = f(4) = f(2) = 4$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos n\Omega t \, dt = \frac{2}{6}\int_{-3}^{3} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^3 (4t-4)\cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right) dt \underset{\text{p.i}}{=} \quad (n \neq 0)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{3}\right)}{\frac{n\pi}{3}}(4t-4)\right]_0^3 - \frac{3}{n\pi}\int_0^3 4\sin\frac{n\pi t}{3}\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot 4\left[\frac{\cos\frac{n\pi t}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right]_0^3 = \frac{24}{n^2\pi^2}\left(\underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n} - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ jämn.} \\ \frac{-48}{n^2\pi^2}, & n \text{ udda.} \end{cases} \qquad a_0 = \frac{8}{3}\left(\frac{9}{2} - 3\right) = 4$$

Svar: $f(t) = 2 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{-48}{(2p+1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2p+1)\pi t}{3}\right)$

2. Z-transf. ger

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \underbrace{y(-1)}_{=2} + 2\left(z^{-2}Y(z) + z^{-1}\underbrace{y(-1)}_{=2} + \underbrace{y(-2)}_{=-\frac{3}{2}}\right)$$

$k=1$ ger $\quad 3 = -1 + 2y(-1) \quad \Leftrightarrow \quad y(-1) = 2$

$k=0$ ger $\quad -1 = 2 + 2y(-2) \quad \Leftrightarrow \quad y(-2) = -\frac{3}{2}$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2}\right) = \frac{4}{z} - 1 = \frac{4-z}{z}$$

$$Y(z) = z\,\frac{4-z}{z^2 - z - 2} = z\,\frac{4-z}{(z+1)(z-2)} =$$

$$= z\left(\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2}\right) \qquad A = -\frac{5}{3} \qquad B = \frac{2}{3}$$

Svar: $y(k) = -\frac{5}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}2^k$

3. $\mathcal{L}$-transf. ger

$$s^3Y(s) - s^2\underbrace{y(0)}_{=0} - s\underbrace{y'(0)}_{=6} - \underbrace{y''(0)}_{=-2} - 3\left(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}\right) + 2Y(s) = \frac{4}{s+1}$$

$$Y(s)(s^3 - 3s + 2) = \frac{4}{s+1} + 6s - 2$$

$$Y(s) = \frac{6s^2 + 4s + 2}{(s+1)(s-1)^2(s+2)}$$

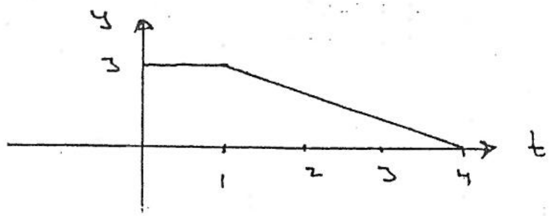
$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{s+2}$$

$A=1 \qquad C=2 \qquad D=-2 \qquad B=1$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} - \frac{2}{s+2}$$

Svar: $y(t) = e^{-t} + e^{t} + 2te^{t} - 2e^{-2t}$

4.



$$f(t) = 3(\theta(t) - \theta(t-1)) + (4-t)(\theta(t-1) - \theta(t-4)) =$$

$$= 3\theta(t) + \theta(t-1) - t\theta(t-1) + (t-4)\theta(t-4) =$$

$$= 3\theta(t) - (t-1)\theta(t-1) + (t-4)\theta(t-4) \supset$$

$$\supset \frac{3}{s} - \frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-4s} = F(s)$$

5. a. $$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{-j\omega}}{-j\omega} + \frac{e^{j\omega}}{j\omega} =$$

$$= \frac{2}{\omega}\cdot\frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j} = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

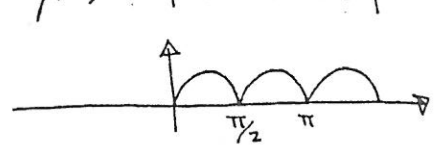
Alt. F10 på F24.

5 b. $$g(t) = f(t+3) + f(t-3) \supset$$

/ tidstranslation F07 / $$\supset e^{3j\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega} + e^{-3j\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

$$= \frac{4\sin\omega}{\omega}\left(\frac{e^{3j\omega} + e^{-3j\omega}}{2}\right) = \frac{4\sin\omega\cos3\omega}{\omega}$$

6. $$f(t) = |\sin t\cos t| = \left|\frac{\sin 2t}{2}\right| = \frac{1}{2}|\sin 2t|$$



f periodisk med $T = \pi/2$.

Bildar $g(t) = f(t) - f(t - \pi/2)\,\theta(t - \pi/2)$

$$G(s) = F(s) - F(s)e^{-\frac{\pi s}{2}}$$

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - e^{-\frac{\pi s}{2}}}$$

$$G(s) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2t\, e^{-st}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{-\frac{e^{-st}\sin 2t}{s} - \frac{2e^{-st}\cos 2t}{s^2}}{1 + \frac{4}{s^2}}\right]_0$$

$$\int \sin 2t\, e^{-st}\,dt = \frac{e^{-st}}{-s}\sin 2t + \frac{2}{s}\int e^{-st}\cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{e^{-st}\sin 2t}{-s} + \frac{2}{s}\left(\frac{e^{-st}}{-s}\cos 2t - \frac{2}{s}\int e^{-st}\sin 2t\,dt\right)$$

$$G(s) = \frac{1}{2}\,\frac{s^2}{s^2+4}\left(\frac{2e^{-\frac{s\pi}{2}}}{s^2} + \frac{2}{s^2} \right) = \frac{e^{-\frac{s\pi}{2}}+1}{s^2+4}$$

Svar: $$F(s) = \frac{1+e^{-\frac{s\pi}{2}}}{1-e^{-\frac{s\pi}{2}}} \cdot \frac{1}{s^2+4}$$

7. $$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin 2t}{t}}_{=\text{jämn}} \cos t \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2t}{t} e^{jt} \, dt = \quad \text{F01}$$

$$= \hat{f}(-1) \quad \text{där} \quad f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$$

$$\text{dvs} \quad \hat{f}(\omega) = \pi\left(\theta(\omega+2) - \theta(\omega-2)\right)$$

$$\hat{f}(-1) = \pi\left(\theta(1) - \theta(-3)\right) = \pi .$$

Svar: π.