Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Axel Hultman

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 6hp, 2014-06-09

Skrivtid 14–19. Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd tre poäng. Betygsgränser: 8 poäng ger betyg 3, 12 poäng ger betyg 4 och 15 poäng ger betyg 5. Tid för tentamensvisning meddelas via kurshemsidan.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ för rummet.

1. Antag att $(1, 2, 3)$ är den av planet Π:s punkter som ligger närmast origo. Finn en ekvation för Π på normalform.

2. Betrakta punkterna $P = (0, 1, 1)$, $Q = (-1, 2, 3)$ och $R = (1, 3, 2)$. Låt ℓ vara den räta linje som innehåller P och Q. Bestäm det kortaste avståndet mellan ℓ och R.

3. Ange en ny ON-bas $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ för rummet sådan att $\overline{f_1}$ är parallell med $\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$ och $\overline{f_2}$ är ortogonal mot $\overline{e_3}$.

4. Finn den lösning till systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 4y_1(t) - y_2(t), \\ y_2'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t) \end{cases}$$

som uppfyller $y_1(0) = 1$ och $y_2(0) = 0$.

Var god vänd!

5. **(a)** För vilka värden på konstanten a är matrisen A inverterbar?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(b) Ange alla värden på konstanten a som gör att ekvationssystemet nedan har oändligt många lösningar. Lös också systemet för dessa värden på a.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1, \\ x - y + az = 2, \\ ax + az = 1. \end{cases}$$

6. Den linjära avbildningen F på rummet uppfyller

$$\begin{cases} F(\overline{e_1} - \overline{e_2}) = 4\overline{e_1} + 2\overline{e_2} - 2\overline{e_3}, \\ F(\overline{e_1} + \overline{e_2}) = -2\overline{e_1} + 2\overline{e_2}, \\ F(\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}) = -2\overline{e_1} + 6\overline{e_2} - 2\overline{e_3}. \end{cases}$$

Bestäm F:s avbildningsmatris.

7. Antag att A är en kvadratisk matris sådan att $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$, där I betecknar identitetsmatrisen. Visa att A inte är inverterbar.