Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2015-03-16, kl 14 - 19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet.

1. Ett plan innehåller linjen $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t, \quad t \in \mathbf{R} \\ z = t \end{cases}$, samt punkten $(1, 2, 3)$. Vilket är planet? Vad är avståndet från origo till planet?

2. Sätt $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3)$. Utvidga till en ON-bas $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ så att $\overline{f}_2$ är ortogonal mot $\overline{e}_1 + \overline{e}_2$. Ange transformationsmatrisen T, där $(\overline{f}_1\, \overline{f}_2\, \overline{f}_3) = (\overline{e}_1\, \overline{e}_2\, \overline{e}_3)T$.

3. Lös matrisekvationen $AX = C + B^{-1}X$, där
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Betrakta ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 3 \\ x_1 - x_2 & = 3 \\ -2x_1 - x_2 & = -3 \\ x_1 + 2x_2 & = 6. \end{cases}$$
Visa att systemet saknar lösning. Bestäm systemets minsta kvadrat-lösning.

5. Den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ är ortogonal projektion på planet $x+2y-z = 0$. Bestäm F:s avbildningmatris (i standardbasen). Vad är projektionen av $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

6. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} y_1'(t) & = 7y_1(t) - 18y_2(t) \\ y_2'(t) & = 3y_1(t) - 8y_2(t). \end{cases}$$
Vilka lösningar uppfyller $y_1(0) = 1$ samt $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \to \infty$?

7. Hitta en matris X så att $X^3 = \begin{pmatrix} -6 & 14 \\ -7 & 15 \end{pmatrix}$.