Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2016-06-07, kl 14 - 19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ för planet eller $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet.

1. Låt Π vara det plan som innehåller linjen $L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$ men som inte skärs av $L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$. Ange planet Π:s ekvation på normalform.

2. Bestäm koordinaterna för $\bar{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ i basen $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3. Betrakta ekvationssystemet
$$\begin{cases} -2x_1 & = -8 \\ 2x_1 + 4x_2 & = 9 \\ -x_1 + 2x_2 & = 1 \\ x_1 - x_2 & = 2. \end{cases}$$
Visa att systemet saknar lösning. Bestäm systemets minsta kvadrat-lösning.

4. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Bestäm $\det(A), \det(B)$ och $\det(C)$. Vilka av AB, BA, AC, CA, BC, CB är inverterbara? Är $BABCABBCBABCBABCCBABABBACACBABCCA$ inverterbar?

5. Bestäm egenvärden och egenvektorer till avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ med avbildningsmatris
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Antag att den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ har avbildningsmatris
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
i standardbasen. Vad blir avbildningsmatrisen i basen $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, där $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$?

7. Låt F vara den avbildning $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som består av först en vridning $60°$ runt $\bar{e}_3$-axeln och sedan $30°$ runt $\bar{e}_1$-axeln. (Bägge vridningarna sker i positiv led, det vill säga sett från spetsen av $\bar{e}_3$ vrids $\bar{e}_1$ mot $\bar{e}_2$ för den första vridningen och sett från $\bar{e}_1$ rör sig $\bar{e}_2$ mot $\bar{e}_3$ för den andra vridningen.) Ange F:s avbildningsmatris A.