Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2016-08-19, kl 8 - 13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet.

1. Låt Π vara planet $x - 2y + 3z = 5$ och låt $\overline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dela upp $\overline{u} = \overline{u}_\perp + \overline{u}_\parallel$ där $\overline{u}_\perp$ är ortogonal mot planet Π och $\overline{u}_\parallel$ är parallell med planet Π.

2. Låt L vara linjen genom punkterna $A = (1, 0, -2)$ och $B = (0, 0, 1)$. Vad är avståndet från punkten $P = (-1, 2, -1)$ till linjen L? Vilken punkt på L är närmast P?

3. Ange för vilka a som ekvationssystemet
$$\begin{cases} 3x + ay &= b \\ 4x + 2y &= 1. \end{cases}$$
är entydigt lösbart. Bestäm för *övriga* a parametern b så att systemet får oändligt många lösningar, och ange dessa.

4. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Vilka av produkterna $AB, BA, A^tB, BA^t, AC, A^tC$ är tillåtna? Vad blir dessa tillåtna produkter? Antag att matriserna D och E är sådana att såväl DE som ED är tillåtna produkter. Måste då produkterna DE och ED ha samma format?

5. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) &= 3y_1(t) + 2y_2(t). \end{cases}$$
Vilken lösning uppfyller $y_1(0) = 5, y_2(0) = 0$?

6. Låt $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, och bestäm $\overline{f}_3$ så att vektorn $\overline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ får koordinaterna $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ i basen $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$. Verifiera/kontrollera att $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ är linjärt oberoende.

7. Antag att $\overline{w}$ och $\overline{u}$ är två enhetsvektorer som är ortogonala mot varandra. Definiera den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ via
$$F(\overline{v}) = \overline{w} \times (\overline{u} \times \overline{v})$$
Bestäm alla egenvektorer till F med egenvärde 0.