Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2017-03-16, kl 14 - 19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet.

1. Låt $\overline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\overline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestäm $\overline{u} \cdot \overline{v}$, $|\overline{u}|$, $|\overline{v}|$,vinkeln $\alpha \in [0, \pi]$ mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$ samt (ortogonala) projektionen av $\overline{u}$ på $\overline{v}$.

2. Låt Π vara planet som innehåller linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$ samt punkten $P = (1, 1, 1)$. Ange planets ekvation på normalform. Vilken punkt i planet är närmast origo?

3. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$
Visa att A och C är inverterbara, och lös matrisekvationen
$$AB = AX + AC^{-1}A$$

4. Betrakta ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 - 2x_2 & = 3 \\ x_1 + 2x_2 & = 5. \end{cases}$$
a) Visa att systemet saknar lösning. Bestäm systemets minsta kvadrat-lösning.
b) Planet Π ges på parameterform av $\overline{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbf{R}$ Vilken punkt i planet Π ligger närmast punkten $P = (1, 3, 5)$?

5. Låt den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ beskriva spegling i planet $x + z = 0$. Ange F:s avbildningsmatris A. Låt nu G vara den linjära avbildningen $G = F \circ F$ som alltså ges av $G(\overline{x}) = F(F(\overline{x}))$. Vad får G för avbildningsmatris? Beskriv G.

6. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} y_1'(t) & = 2y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) & = 2y_1(t) + 3y_2(t) + 2y_3(t) \\ y_3'(t) & = 2y_2(t) + 4y_3(t). \end{cases}$$
Vilka lösningar är begränsade då $t \to \infty$?

7. Antag att den kvadratiska $n \times n$-matrisen A ($n = 2$ eller 3) uppfyller $I + A + A^2 + A^3 = 0$, där I som vanligt är enhetsmatrisen. Visa att A är inverterbar.