Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2018-06-04, kl 14 - 19.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ för planet ($\mathbf{R}^2$) eller $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet ($\mathbf{R}^3$).

1. Låt Π vara planet $x + y - 2z = 4$ och låt $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dela upp $\bar{u} = \bar{u}_\perp + \bar{u}_\parallel$ där $\bar{u}_\perp$ är ortogonal mot planet Π och $\bar{u}_\parallel$ är parallell med planet Π.

2. $\underline{f} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$, där $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, är en bas för $\mathbf{R}^3$. Bestäm koordinaterna för $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{f}$.

3. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Lös matrisekvationen
$$ABX = E - CDX.$$

4. Låt F vara den linjära avbildning som beskriver spegling i planet $x + 2y + 3z = 0$. Bestäm F:s avbildningsmatris A. Kontrollera att en normalvektor till planet avbildas korrekt.

5. Låt $A = A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & x+1 \\ x+1 & 2 & 3-x \end{pmatrix}$. Visa att $\det(A)$ är oberoende av x. Det visar sig att för ett visst x blir inversen till A lika med $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Vilket x då?

6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - y_2(t) + y_3(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) + 6y_3(t) \\ y_3'(t) = y_2(t) \end{cases}.$$
Vilka lösningar är begränsade då $t \to \infty$?

7. Antag att den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ har avbildningsmatrisen $A_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i standardbasen $\underline{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Basen $\underline{f} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ är basen $\underline{e}$ vriden en vinkel θ (i positiv led), $0 \leq \theta < 2\pi$. Vektorn $\bar{u}$ är en egenvektor till F med egenvärde 0, och man vet att $\bar{u}$ i basen $\underline{f}$ har koordinaterna $X_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vilka värden kan θ ha?