Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2019-03-21, kl 14 - 19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ för planet eller $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet.

1. Bestäm avståndet från punkten $P = (1, -2, 2)$ till planet $2x - y + z = 3$. Vilken punkt i planet är närmast P?

2. Antag att $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, och att $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Välj en (nollskild) vektor $\bar{f}_1$ som är ortogonal mot både $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$, och välj också en (nollskild) vektor $\bar{f}_2$ som är ortogonal mot både $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_3$. Visa att $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$ är ortogonala mot varandra. Normera (om det behövs) $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$ och komplettera med en vektor $\bar{f}_3$ så att $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ bildar en ON-bas. Redovisa dina kontroller.

3. Bestäm den (inverterbara) 2×2-matris X som löser matrisekvationen
$$X^{-1}B + X^{-1}C^{-1} = B^{-1}$$
där $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Betrakta ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + 2y = 2 \\ x = -8 \\ 2y = 2 \end{cases}.$$
Visa att systemet saknar lösning. Bestäm systemets minsta kvadrat-lösning.

5. F är den linjära avbilding $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som beskriver projektion på planet $2x + y - 3z = 0$. Ange F:s avbildningsmatris (i standardbasen). Kontrollera att en normalvektor till planet avbildas som den ska.

6. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_1(t) + 2y_2(t) + y_3(t) \\ y_2'(t) &= y_2(t) - y_3(t) \\ y_3'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t) + 5y_3(t) \end{cases}$$

7. Avgör för vilka (a, b) som följande matris är diagonaliserbar.
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix}.$$