Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2019-06-10, kl 14 - 19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet.

1. Låt $\overline{u} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\overline{v} = \left(\begin{smallmatrix}8\\1\\4\end{smallmatrix}\right)$. Bestäm projektionen av $\overline{u}$ på $\overline{v}$ samt projektionen av $\overline{v}$ på $\overline{u}$. Bestäm även $\overline{u} \times \overline{v}$ samt vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$.

2. Bestäm för varje a antal lösningar till ekvationen
$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ ax + 4y = a^2. \end{cases}$$
Ange alla lösningarna för den/de a där det finns parameterlösning.

3. Lös matrisekvationen
$$AX + B = A^2X + C$$
där $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Bestäm egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildningen F med avbildningsmatris
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. F är den linjära avbilding $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som beskriver spegling i planet $x + 2y - 4z = 0$. Ange F:s avbildningsmatris (i standardbasen). Kontrollera att en vektor parallell med planet avbildas som den ska.

6. Låt $\overline{f}_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$, $\overline{f}_2 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Varför är $\underline{f} = (\overline{f}_1\ \overline{f}_2)$ en bas för planet? Antag att vektorn $\overline{u} = \left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)$ i standardbasen, dvs $\overline{u} = \underline{e}\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)$, där $\underline{e} = (\overline{e}_1\ \overline{e}_2)$. Vad är koordinaterna för $\overline{u}$ i basen $\underline{f}$? Antag att den linjära avbildningen F har avbildningsmatrisen $A = A_{\underline{e}} = \left(\begin{smallmatrix}3 & -1\\-2 & 1\end{smallmatrix}\right)$ i basen $\underline{e}$. Vad är F:s avbildningsmatris i basen $\underline{f}$?

7. Låt F vara en linjär avbildning $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, och anta att lösningen till ekvationen $F(\overline{u}) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ är $\overline{u} = \left(\begin{smallmatrix}t+1\\2-t\end{smallmatrix}\right), t \in \mathbf{R}$. Ange vilka vektorer $\overline{v}$ som avbildas på nollvektorn $\overline{0}$. Ange också för vilka vektorer $\overline{v}$ det finns vektorer $\overline{u}$ så att $F(\overline{u}) = \overline{v}$.