Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod/modul: TAIU05/TEN1

Hemtentamen i Linjär algebra för högskoleingenjörer

2020-03-25 kl. 14.00–19.00

Observera att andra regler än normalt gäller. Följ instruktionerna noggrant.

- Hjälpmedel är tillåtna (böcker, miniräknare, dator, osv.). Men det är naturligtvis **inte** tillåtet att på något sätt samarbeta med eller ta hjälp av annan person.
- Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt **handskrivna** – om inte särskilda skäl såsom funktionshinder föreligger – och avslutade med ett svar. (Det är också tillåtet att skriva för hand med ritpenna på ritplatta eller surfplatta, men endast handskriven text.) **Även om räknehjälpmedel är tillåtna ska uträkningar redovisas lika noga som vanligt, dvs. som om man inte hade några hjälpmedel.**
- Använd inte rödpenna. Lös högst en uppgift per sida. Numrera sidorna (sorterade i uppgiftsordning).

Jourhavande lärare:
Examinator. Se kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TAIU05/`

När du är **klar med tentan**, gör följande:

1. Märk varje sida med utbildningskod, program, namn och personnummer, t.ex.

   `TAIU05 MI Anna Andersson 900101-0000`

2. Fotografera (eller skanna) varje sida. Kontrollera att bilderna är så pass tydliga att text och symboler går att läsa, annars kan vi inte rätta tentan.

3. Skicka bilderna med epost till

   - mai-tenta@mai.liu.se.

   Skriv utbildningskod, program, namn och personnummer även i ämnesraden på ditt mejl. Mejlet får inte vara större än 25 MB (annars kommer det inte fram). Om nödvändigt, dela upp i flera mejl – meddela i så fall detta i varje mejl. Du får ett bekräftelsesvar på varje mejl.

   Tentan måste ha inkommit till MAI senast 30 minuter efter skrivtidens slut, alltså kl. 19.30 om du ej har förlängd skrivtid. Observera att dessa 30 extra minuter **inte är skrivtid** utan avsedda för att hantera ovanstående punkter.

Det är ditt eget ansvar att **läsliga** bilder/filer skickas in **i tid** i enlighet med ovanstående instruktioner.

Tentamen innehåller denna gång bara 6 uppgifter, och inga överbetyg delas ut.
Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg tre krävs minst 8 poäng.
Svar kommer att publiceras på kurshemsidan. Det blir ingen tentavisning, men skrivningarna kommer att vara tillgängliga via MAI:s studerandeexpedition.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet.

1. Låt Π vara planet $x - 2y + 3z = 5$ och låt, för en given konstant a, $\overline{u} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dela upp $\overline{u} = \overline{u}_\perp + \overline{u}_\parallel$ där $\overline{u}_\perp$ är ortogonal mot planet Π och $\overline{u}_\parallel$ är parallell med planet Π. Vad innebär specialfallet $a = 1$ geometriskt?

2. Låt $\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$. Bestäm a så att $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ blir linjärt beroende. Uttryck sedan (med detta a insatt) valfri vektor i de övriga två.

3. Lös matrisekvationen
$$AX = 3X + 2B - A^{-1}X$$
där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Betrakta de fyra linjerna $L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$, $L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$, $L_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$, samt L_4 som är linjen som går genom punkterna $P = (-1, -1, -1)$ och $Q = (7, -5, 11)$. Vilka linjer är parallella med varandra? Är några linjer lika/sammanfallande?

5. Låt F vara den linjära avbildning som beskriver projektionen på linjen
L: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$. Bestäm F:s avbildningsmatris A. Föreslå och genomför en kontroll av att en (av dig vald) vald vektor avbildas som den ska.

6. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_1(t) - 4y_2(t) \\ y_2'(t) &= -2y_1(t) + 8y_2(t) \end{cases}.$$
Vilka lösningar är begränsade för $t \geq 0$? Ange alla lösningar sådana att $y_2(t) \to 1$ då $t \to -\infty$.