Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Utbildningskod: TAIU05
Modul: TEN1

Hemtentamen i Linjär algebra för högskoleingenjörer, 6 hp

2020-06-08, kl 14 - 19

Observera att andra regler än normalt gäller. Följ instruktionerna noggrant.

- Hjälpmedel är tillåtna (böcker, miniräknare, dator, osv.). Men det är naturligtvis **inte** tillåtet att på något sätt samarbeta med eller ta hjälp av annan person.
- Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt **handskrivna** – om inte särskilda skäl såsom funktionshinder föreligger – och avslutade med ett svar. (Det är också tillåtet att skriva för hand med ritpenna på ritplatta eller surfplatta, men endast handskriven text.) **Även om räknehjälpmedel är tillåtna ska uträkningar redovisas lika noga som vanligt, dvs. som om man inte hade några hjälpmedel.**
- Använd inte rödpenna. Lös högst en uppgift per sida. Numrera sidorna (sorterade i uppgiftsordning).

Jourhavande lärare: Se kurshemsidan https://courses.mai.liu.se/GU/TAIU05/

När du är **klar med tentan**, följ instruktionerna som du fick per mejl när anmälan var stängd. Dessa instruktioner finns även här: https://old.liu.se/mai/und. Glöm inte att lösningarna skall vara samlade i **endast en** pdf-fil.

Var god vänd!

Tentamen innehåller denna gång bara 6 uppgifter, och inga överbetyg delas ut.
Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg tre krävs minst 8 poäng.
Svar kommer att publiceras på kurshemsidan. Det blir ingen tentavisning, men skrivningarna kommer att vara tillgängliga via MAI:s studerandeexpedition.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet.

1. Vilken av punkterna $P = (1, 2, 1)$ och $Q = (3, -2, 1)$ ligger närmast planet $x - y + 2z = 3$? Vad är avståndet?

2. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay + \ \ z = 1 \\ x + \ \ y + az = 1 \\ x + 3y + \ \ z = a \end{cases} .$$

Ange, för varje värde på parametern a, antal lösningar till ekvationssystemet. Ange lösningarna i det/de fall då systemet har en lösning som inte är entydig.

3. Låt $\overline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Beräkna följande: $\overline{u}_{\|\overline{v}}$, $\overline{v}_{\|\overline{u}}$, $||\overline{u}||$, $||\overline{v}||$, $\overline{u} \times \overline{u}$, samt vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$. Här betyder, som vanligt, till exempel $\overline{u}_{\|\overline{v}}$ ortogonalprojektionen av $\overline{u}$ på $\overline{v}$.

4. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y \ \ = 1 \\ 2x - y \ \ = 2 \\ x + y \ \ = a \end{cases} ,$$

där a är en parameter. Bestäm systemets minsta kvadrat-lösning (som alltså får bero på a). Går det att välja a så att minsta-kvadrat-lösningen också blir en lösning i vanlig mening?

5. Låt F vara den linjära avbildning som beskriver projektionen på planet $2x - 3y + z = 0$. Bestäm F:s avbildningsmatris A. Föreslå och genomför en kontroll av att en (av dig) vald egenvektor avbildas som den ska.

6. Antag att avbildningen F i standardbasen $\underline{e} = (\overline{e}_1\ \overline{e}_2)$ har avbildningsmatrisen $A_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Inför en ny bas $\underline{f} = (\overline{f}_1\ \overline{f}_2)$ där $\overline{f}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Om vektorn $\overline{u}$ har koordinaterna $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{e}$, vad är då koordinaterna för $\overline{u}$ i basen $\underline{f}$? Vad blir avbildningsmatrisen uttryckt i basen $\underline{f}$, det vill säga $A_{\underline{f}}$?