Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Utbildningskod: TAIU05
Moment: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2019-08-21, kl 8 - 13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet.

1. Låt L vara linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$. Planet Π innehåller linjen L samt punkten P=(2,-1,3). Bestäm planets ekvation på normalform. Vad är avståndet från planet till origo?

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Beräkna inversen A^{-1} samt, utan att beräkna A^{-2}, determinanten $\det(A^{-2})$. (Som vanligt är $A^{-2} = (A^{-1})^2$.)

3. Betrakta ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y \;\; = 4 \\ -x + y \;\; = 6 \end{cases}.$$
Bestäm systemets minsta kvadrat-lösning. Ange projektionen av vektorn $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ på det plan genom origo som innehåller vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Bestäm matrisen X så att
$$XB + A^{-1} = XC^2$$
där $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. F är den linjära avbilding $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som beskriver spegling i planet $3x - y + 2z = 0$. Ange F:s avbildningsmatris (i standardbasen). Beskriv (med ord) utifrån en geometrisk tolkning vilka egenvektorer F har.

6. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) - y_3(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = \qquad\quad 5y_2(t) - 3y_3(t) \end{cases}$$
Ange alla lösningar som är begränsade för $t \geq 0$.

7. Låt, för varje par av vektorer $\overline{a}$, $\overline{b}$ i $\mathbf{R}^3$, F vara den linjära avbildning $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som ges av
$$F(\overline{x}) = \overline{a} \times \overline{x} + \overline{x} \times \overline{b}.$$
Ange, för varje val av $\overline{a}$ och $\overline{b}$, vilka egenvektorer (med tillhörande egenvärden) F har.