Lösningsskiss för TAIU05, 2017-03-16

1. Vi finner att $\overline{u}\cdot\overline{v} = 9$, $|\overline{u}| = 3$ samt $|\overline{v}| = 3\sqrt{2}$. Då $\overline{u}\cdot\overline{v} = |\overline{u}|\cdot|\overline{v}|\cos\alpha$, där α är vinkeln mellan vektorerna finner vi att $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$ och därmed (eftersom $\alpha \in [0,\pi]$) att $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Projektionsformeln ger vidare att $\overline{u}_{\|\overline{v}} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v} = \frac{1}{2}\overline{v} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

2. Riktningsvektorn för linjen, $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, är parallel med planet, och det samma gäller för vektorn mellan punkterna $(1,0,-2)$ och $(1,1,1)$, dvs $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$. En normalvektor till planet ges då av kryssprodukten: $\overline{n} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}$. Det innebär att planets ekvation ges av $5x+3y-z+D=0$ där D bestäms genom att sätta in exempelvis koordinaterna för $P=(1,1,1)$. Ekvationen blir alltså $5x+3y-z-7=0$. Närmaste punkten kan vi till exempel få genom att från origo följa linjen som har planets normalvektor som riktningsvektor, dvs $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}, t\in\mathbf{R}$, och se var den skär planet. Genom att stoppa in i planets ekvation får vi $t=\frac{1}{5}$. Alltså är närmaste punkten $(1,3/5,-1/5)$.

3. Vi finner att $\det(A) = -1 \neq 0$, vilket innebär att A är inverterbar. Samma gäller för C eftersom $\det(C) = -2$, och vi får också att $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$. Genom att multiplicera ekvationen med A^{-1} från vänster får vi $B = X + C^{-1}A$ och sålunda är $X = B - C^{-1}A = \ldots = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-5\\0&5\end{pmatrix}$.

4. a) Ekvation 2 och 3 ger $x_1 = 4, x_2 = \frac{1}{2}$, vilket inte satisfierar ekvation 1. Systemet saknar alltså lösning. Systemet kan skrivas $A\overline{x} = \overline{b}$ med $A = \begin{pmatrix}2&1\\1&-2\\1&2\end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$. Normalekvationerna $A^tA\overline{x} = A^t\overline{b}$ ger ekvationssystemet $\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cc|c}6&2&10\\2&9&5\end{array}\right)\\ \begin{array}{cc}x_1&x_2\end{array}\end{array}$, med lösning $x_1 = 8/5, x_2 = 1/5$, vilket alltså också är minsta kvadrat-lösningen.
b) Vi noterar att vektorerna $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ är precis kolumnerna i matrisen A ovan, liksom att vektorn $\overline{OP} = \overline{b}$. Från teorin vet vi att 'bästa värdena' på parametrarna t,s för att komma så nära P som möjligt är just minsta kvadrat-lösningen ovan. Det innebär att 'bästa' $\overline{u}$ är $\frac{8}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}17\\6\\10\end{pmatrix}$. Närmaste punkten är alltså $(17/5,6/5,2)$.

5. Vi söker $F(\overline{e}_1), F(\overline{e}_2), F(\overline{e}_3)$, där i allmänhet $F(\overline{u}) = \overline{u} - 2\frac{\overline{u}\cdot\overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n}$, där $\overline{n}$ är en normalvektor till speglingsplanet. Som normalvektor kan vi ta $\overline{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, och med detta val av $\overline{n}$ blir $\overline{n}\cdot\overline{n} = 2$, så att $F(\overline{u}) = \overline{u} - (\overline{u}\cdot\overline{n})\overline{n}$. Vi stoppar in i tur och ordning $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ och finner $F(\overline{e}_1) = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_2) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_3) = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, dvs avbildningsmatrisen A blir $A = \begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$. Avbildningen G speglar två gånger i samma plan, vilket innebär att varje vektor avbildas på sig själv. Sålunda har G avbildningsmatrisen I (enhetsmatrisen). Avbildningsmatrisen kan också fås ur A^2, vilket också blir I.

6. Systemet kan skrivas $Y'(t) = AY(t)$, där $Y(t) = \begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}$. Vi söker egenvärden och egenvektorer till A. Egenvärdena är lösningarna till karaktäristiska ekvationen $0 = \det(A - \lambda I) = \ldots = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)$. Rötterna/egenvärdena är alltså $\lambda = 0$, $\lambda = 3$ och $\lambda = 6$. En kalkyl visar att som tillhörande egenvektorer kan vi ta $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, (egenvärde 0), $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, (egenvärde 3) och $\overline{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ (egenvärde 6). $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ bildar en bas för $\mathbf{R}^3$ (tre skilda egenvärden), och därmed vet vi att allmänna lösningen gas av

$$Y(t) = \begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}e^{3t} + C_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}e^{6t},\ C_1,\ C_2 \text{ och } C_3 \text{ godtyckliga konstanter.}$$

För att en lösning skall vara begränsad då $t\to\infty$ krävs att $C_2 = C_3 = 0$.

7. Vi har att $I + A + A^2 + A^3 = 0 \Leftrightarrow -A - A^2 - A^3 = I \Leftrightarrow A(-I - A - A^2) = I$. Här står att $-I - A - A^2$ är en invers till A som sålunda är inverterbar.