Lösningsskiss för TAIU05, 2017-08-18

1. Vi bestämmer avstånden från P och Q till planet. Det kan göras på flera sätt, ett sätt är att titta på var linjerna genom P resp. Q som har en normalvektor till planet som riktningsvektor skär planen. En normalvektor till planet är $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, och linjen genom P: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$ skär planet (sätt in i planets ekvation) för $t = \frac{13}{14}$. Vektorn från P till skärningspunkten är $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{13}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{13}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Avståndet till planet är längden av denna vektor, dvs $|\frac{13}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}| = \frac{13}{14}\sqrt{14} = \frac{13}{\sqrt{14}}$. Linjen genom Q: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$ skär planet för $t = \frac{1}{7}$ och nu blir avståndet $|\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}| = \frac{2}{14}\sqrt{14} = \frac{2}{\sqrt{14}}$. Q ligger alltså närmare planet än vad P gör.

2. Vi gör traditionella radoperationer där vi bara skriver ut vissa led: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right)$. Här ser vi att $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Därefter följer att $A^{-2} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 8 & -18 & 8 \\ 12 & 0 & -6 \\ -4 & 18 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & -9 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \\ -2 & 9 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Vi kan sätta upp ett traditionellt schema, men vi kan också resonera så här. Ekvation 3 minus ekvation 1 ger $-ay = a$ vilket innebär att $a = 0$ (och då är y obestämd) eller att $y = -1$ (och då är a obestämd). $a = 0$ ger att $x + 2z = 0, y = 1$ med lösningar $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$. Å andra sidan, om $y = -1$, är ekvationerna (flytta över 'y-delen' till högerledet) $\begin{cases} x + 2z = a \\ x + 2z = 2 \\ x + 2z = a \end{cases}$. Här ser vi att $a = 2$ och lösningarna är då $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.

4. Eftersom $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ a+1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ (a+1)/5 \end{pmatrix}$ är enda möjliga egenvärdet 5, och en egenvektor får vi om också $\frac{a+1}{5} = 1$, dvs $a = 4$. Då blir $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, karaktäristiska ekvationen $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$ och det andra egenvärdet är alltså $\lambda = -1$. Vi finner att en egenvektor med egenvärde -1 är tex $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och en bas (ty ickeparallella) av egenvektorer är exempelvis $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$.

5. Linjen kan beskrivas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\overline{v}, t \in \mathbf{R}$ där $\overline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sålunda är $F(\overline{u}) = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v}$ och avbildningsmatrisen byggs upp av $F(\overline{e}_1), F(\overline{e}_2), F(\overline{e}_3)$ som visar sig vara $\frac{2}{6}\overline{v}$, $\frac{1}{6}\overline{v}$ resp. $\frac{-1}{6}\overline{v}$. Avbildningamatrisen A är alltså $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. En egenvektor med egenvärde 0 är varje vektor ($\neq \overline{0}$) som är ortogonal mot $\overline{v}$, till exempel $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. a) Eftersom $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$ blir ekvationen $\overline{v} \times \overline{u} = -\overline{v} \times \overline{u}$ dvs $\overline{v} \times \overline{u} = \overline{0}$. Detta kräver som bekant att $\overline{u}$ är parallell med $\overline{v}$, det vill säga lösningen är $\overline{u} = t\overline{v}, t \in \mathbf{R}$.
b) Nu ger $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$ att $\overline{v} \cdot \overline{u} = -\overline{v} \cdot \overline{u}$ dvs $\overline{v} \cdot \overline{u} = 0$. Lösningsmängden är alltså alla vektorer $\overline{u}$ som är ortogonala mot $\overline{v}$.
c) Den enda vektor som uppfyller både a) och b) är nollvektorn $\overline{0}$.

7. Vi skriver systemet $AX = B + BC$, och eftersom $B + BC = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 12-a & 5a-3 \end{pmatrix}$ får vi schemat $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -6 & 11 \\ -3 & -6 & 12-a & 5a-3 \end{array}\right)$. $r2 \to r2 + 3r1$ ger $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & -a-6 & 5a+30 \end{array}\right)$ För att det skall finnas en lösning måste vi ha en genomgående nollrad på nedersta raden, vilket också kan åstadkommas med $a = -6$. Vi landar då i $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ och om $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ kan vi läsa av de två ekvationerna $x_{11} + 2x_{21} = -6$, $x_{12} + 2x_{22} = 11$. Med $x_{21} = t, x_{22} = s$ finner vi lösningen $X = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbf{R}$.