

Lösningsskiss för TAIU05, 2018-06-04

- En normalvektor till planet är $\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, och eftersom $\bar{u}_\perp = \bar{u}_{\parallel\bar{n}}$ blir $\bar{u}_\perp = \frac{\bar{u} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \bar{n} = -\frac{1}{2} \bar{n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ur det får vi att $\bar{u}_{\parallel} = \bar{u} - \bar{u}_\perp = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Kalla koordinaterna för x_1, x_2, x_3 . Vi skall bestämma dessa så att $x_1 \bar{f}_1 + x_2 \bar{f}_2 + x_3 \bar{f}_3 = \bar{u}$, det vill säga $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi skall sålunda lösa ekvationen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

vilken visar sig ha lösningen $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3$.

- Vi skriver först om ekvationen: $ABX = E - CDX \Leftrightarrow ABX + CDX = E \Leftrightarrow (AB + CD)X = E$. Om $AB + CD$ är inverterbar har vi alltså lösningen $X = (AB + CD)^{-1}E$. Vi räknar ut $AB = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ så att ekvationen blir $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Nu ser vi att $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ är inverterbar och att $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Alltså blir $X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- För ett allmänt \bar{u} får vi speglingen av \bar{u} i planet om vi från \bar{u} subtraherar 2 gånger \bar{u} 's projektion på en normalvektor till planet, det vill säga $F(\bar{u}) = \bar{u} - 2 \frac{\bar{u} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \bar{n}$. Som normalvektor kan vi ta till exempel $\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vidare ges $F : s$ avbildningsmatris A av $(F(\bar{e}_1) \ F(\bar{e}_2) \ F(\bar{e}_3))$, dvs A:s kolumner består av i tur och ordning $F(\bar{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$, dvs

$$F(\bar{e}_i) = \bar{e}_i - 2 \frac{\bar{e}_i \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \bar{n}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dessa vektorer blir $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, vilket innebär att $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$. En normalvektor skall avbildas på minus sig själv. Vi finner också att $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- En direkt uträkning visar att $\det(A(x)) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & x+1 \\ x+1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = -2(3-x) + 12 - 4(x+1) + 2(x+1) = 4$ som inte beror på x . En matris gånger sin invers (i valfri ordning) skall ge enhetsmatrisen. Vi räknar ut produkten: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & x+1 \\ x+1 & 2 & 3-x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 8 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & x+1 \\ x+1 & 2 & 3-x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8-2x & 0 & 4(x-3) \\ 5(x-3) & 2 & -9(x-3) \\ 3-x & 0 & 2(x-2) \end{pmatrix}$ vilket blir enhetsmatrisen precis när $x = 3$.

- Systemet kan skrivas $Y'(t) = AY(t)$, där $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, och vi söker egenvärden och egenvektorer till A. Karakteristiska ekvationen är $0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$, så rötterna/egenvärdena är 2, 1 och -2.

Sedvanliga räkningar ger att vi som egenvektorer kan välja $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (egenvärde 2), $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (egenvärde 1) och $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (egenvärde -2). $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ bildar en bas för planet (tre skilda egenvärden) och sålunda vet vi att allmänna lösningen ges av

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \text{ godtyckliga konstanter.}$$

De lösningar som är begränsade då $t \rightarrow \infty$ karakteriseras av att $C_1 = C_2 = 0$.

- Antag att basen \underline{f} är vriden vinkeln θ relative basen \underline{e} . Det innebär att $\underline{f} = \underline{e}T$ där $T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Om koordinaterna i standardbasen \underline{e} betecknas med $X_{\underline{e}}$ har vi att $\bar{u} = \underline{e}X_{\underline{e}} = \underline{f} = \underline{e}TX_{\underline{f}}$, dvs $X_{\underline{e}} = TX_{\underline{f}}$. Eftersom \bar{u} är en egenvektor med egenvärde 0, så följer att $\bar{0} = A_{\underline{e}}X_{\underline{e}} = A_{\underline{e}}TX_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots = 5(\cos \theta + \sin \theta) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alltså är $\cos \theta + \sin \theta = 0$, och om $0 \leq \theta < 2\pi$ så innebär det att $\theta = \frac{3\pi}{4}$ eller $\theta = \frac{7\pi}{4}$.