Lösningsskiss för TAIU05, 2019-03-21

1. En normalvektor $\overline{n}$ till planet ges av $\overline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bilda den linje L genom P som har $\overline{n}$ som riktningsvektor. Vi får $L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$. Genom att stoppa in koordinaterna för x, y, z i planets ekvation får vi ekvationen $6 + 6t = 3$, med lösning $t = -1/2$. Med parametern $t = -1/2$ finner vi $x = 0$, $y = -3/2$, $z = 3/2$. $Q = (0, -3/2, 3/2)$ är alltså den punkt på linjen L som dessutom ligger i planet, vilket också är den närmaste punkten. Avståndet blir $||\overrightarrow{QP}|| = ||\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}|| = ||\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}|| = \frac{\sqrt{6}}{2}$. (Notera att $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overline{n}$.)

2. Flera val kan göras, till exempel $\overline{f}_1 = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_2 = \overline{v}_1 \times \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vi ser att $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$ är ortogonala: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$. Innan vi normerar $\overline{f}_1, \overline{f}_2$ kan vi bilda en vektor $\overline{f}_3$ som är ortogonal mot bägge: $\overline{f}_3 = \overline{f}_1 \times \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vi normerar (och behåller en smula oegentligt samma namn) och får $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En kontroll visar att $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ verkligen bildar en ON-bas.

3. Vi multiplicerar med X från vänster och får $B + C^{-1} = XB^{-1}$. En multiplikation med B från höger ger sedan
$$X = (B + C^{-1})B.$$
Eftersom $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ blir $X = (B + C^{-1})B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Rad 3 ger x=-8, rad 4 ger y=1. Men dessa värden insatta i rad 1 och rad 2 ger ingen lösning, så hela systemet saknar lösning. Med $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ heter vårt system $A\overline{x} = \overline{b}$, och minsta kvadrat-lösningen är lösningen till normalekvationerna $A^tA\overline{x} = A^t\overline{b}$. Vi finner att $A^tA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$, $A^t\overline{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$. Vi löser ekvationen $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$ vilket ger minsta kvadrat-lösningen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. F:s avbildningsmatris A ges av $(F(\overline{e}_1)\, F(\overline{e}_2)\, F(\overline{e}_3))$, dvs A:s kolumner består av i tur och ordning $F(\overline{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Projektion av en vektor $\overline{u}$ i planet får vi om vi från $\overline{u}$ subtraherar $\overline{u}$:s projektion på en normalvektor till planet. Som normalvektor kan vi ta $\overline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, och sålunda är
$$F(\overline{u}) = \overline{u} - \frac{\overline{u} \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n}, \text{ dvs } F(\overline{e}_i) = \overline{e}_i - \frac{\overline{e}_i \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n}, \quad i = 1, 2, 3.$$
Vi finner att $F(\overline{e}_1) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_2) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_3) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. så att avbildningsmatrisen blir $A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & -2 & 6 \\ -2 & 13 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. En normalvektor skall avbildas på nollvektorn, och vi ser också att $A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & -2 & 6 \\ -2 & 13 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Vi sätter $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ och kan då skriva systemet $Y'(t) = AY(t)$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Vi söker en bas av egenvektorer till A. Egenvärdena är lösningarna till karaktäristiska ekvationen $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 5)$. Egenvärdena är alltså $\lambda = 0, \lambda = 2, \lambda = 5$. Till egenvärdena räknar vi fram egenvektorer. Vi väljer till exempel $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (egenvärde 0), $\overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (egenvärde 2) samt $\overline{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ (egenvärde 5).

$\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ bildar en bas för $\mathbf{R}^3$ (skilda egenvärden), och därmed vet vi att allmänna lösningen gas av

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} e^{5t},$$ där C_1, C_2 och C_3 är godtyckliga konstanter.

7. Kalla matrisen för A. Vi ser att egenvärdena är $1, b, b+1$, och om alla dessa är olika finns en bas av egenvektorer så att A är diagonaliserbar i åtminstone fallen $b \neq 0, b \neq 1$.

   $b = 0$ ger matrisen $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda = 0$ (enkelrot) samt $\lambda = 1$ (dubbelrot). Till $\lambda = 0$ hittar vi lösningsmängden $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$. Till $\lambda = 1$ hittar vi lösningsmängden $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbf{R}$. Exempelvis $\{\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ bildar en bas av egenvektorer, så att A är diagonaliersbar i det fallet.

   $b = 1$ ger matrisen $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda = 1$ (dubbelrot) samt $\lambda = 2$ (enkelrot). $\lambda = 2$ ger lösningsmängden $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$. När $\lambda = 1$ skall vi lösa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

   Vi ser att $z = 0$ och att övriga ekvationer blir $ay = 0$ med x och y som obekanta. Om $a = 0$ har vi inga restriktioner på x och y. Lösningen blir då $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbf{R}$. Det innebär att det finns en bas av egenvektorer så att A är diagonaliserbar.

   Om däremot $a \neq 0$ måste också $y = 0$ så att lösningen blir $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$. Här finns ingen bas av egenvektorer, dvs A är inte diagonaliserbar. Sålunda är A diagonaliserbar för alla (a, b) utom $b = 1, a \neq 0$. Anmärkning, A är diagonaliserbar om $a = 0$ (oavsett b) eftersom A då är symmetrisk och till och med redan diagonal.