Lösningsskiss för TAIU05, 2020-03-25

1. En normalvektor till planet är $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Här är $\overline{u}_\perp = \overline{u}_{\|\overline{n}}$, så vi finner att $\overline{u}_\perp = \frac{\overline{u}\cdot\overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n} = \frac{a-1}{14}\overline{n} = \frac{a-1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vi får sedan att $\overline{u}_\| = \overline{u} - \overline{u}_\perp = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{a-1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13a+1 \\ 26+2a \\ 17-3a \end{pmatrix}$. Om $a = 1$ ser vi att $\overline{u}_\perp = \overline{0}$ (och att $\overline{u}_\| = \overline{u}$) vilket innebär att $\overline{u}$ redan från början är parallell med planet.

2. Vi räknar ut $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi vill bestämma a sa att vi kan hitta icke-triviala lösningar till ekvationen $\lambda_1\overline{u}+\lambda_2\overline{v}+\lambda\overline{w} = \overline{0}$, det vill säga $\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vi skall sålunda studera ekvationen

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \end{array} \sim \underset{\text{radoperationer}}{\text{naturliga}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{array}\right).$$

Här ser vi att vi måste ha $a = 4$ för linjärt beroende. Lösningen blir då $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$, så att till exempel $t = -1$ ger (med $a = 4$) $\overline{u} + 2\overline{v} - \overline{w} = \overline{0}$ det vill säga $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Här kan man lätt lösa ut valfri vektor uttryckt i de övriga. Anmärkning. Man kan först undersöka linjärt beroende genom att titta på determinanten $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = a - 4$. Därefter kan man låta $a = 4$ och söka det linjära beroendet.

3. Uppgifter kräver att A är inverterbar, och så är också fallet: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ekvationen kan skrivas $(A + A^{-1} - 3I)X = 2B$ och om $A + A^{-1} - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ också är inverterbar ges lösningen av $X = 2(A + A^{-1} - 3I)^{-1}B$. Vi finner att $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ så att $X = -\frac{2}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Vi skriver också linjen L_4 på parameterform: $L_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$, där $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} = \overline{PQ}$. Vi kan nu hitta riktningsvektorer för linjerna, och de naturliga valen är (för respektive linje) $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$. Vi ser att $\overline{v}_1$ och $\overline{v}_2$ inte är parallella, men att $\overline{v}_1, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ är det. ($\overline{v}_3 = -2\overline{v}_1$, $\overline{v}_4 = 4\overline{v}_1$.) Alltså är linjerna L_1, L_3, L_4 parallella. Eftersom till exempel L_1 och L_3 är parallella så är de också lika om någon punkt på L_3 ligger på L_1. Vi undersöker om vi kan lösa ekvationen $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, vilket inte går. L_1 och L_3 är alltså parallella men inte lika. För att undersöka L_1 och L_4 tittar vi på ekvationen $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, som har lösningen $t = -1$. L_1 och L_4 beskriver därmed samma linje.

5. Avbildningsmatrisen A till F ges av $(F(\overline{e}_1)\, F(\overline{e}_2)\, F(\overline{e}_3))$, dvs A:s kolumner består i tur och ordning av $F(\overline{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Projektion av en vektor $\overline{u}$ på linjen får vi om vi projicerar $\overline{u}$ på en riktningsvektor $\overline{v}$ till linjen. En riktningsvektor är $\overline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, och därmed får vi

$$F(\overline{u}) = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v}, \text{ dvs } F(\overline{e}_i) = \frac{\overline{e}_i\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Vi finner att $F(\overline{e}_1) = \frac{3}{14}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_2) = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_3) = \frac{2}{14}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. vilket ger att $A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Exempel på kontroll: Riktningsvektorn $\overline{v}$ skall avbildas på sig själv, vilket stämmer: $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. Vi kan skriva systemet $Y'(t) = AY(t)$, där $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$. Vi söker egenvärden och egenvektorer till A och finner att karaktäristiska ekvationen blir $0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 9\lambda = \lambda(\lambda - 9)$ så att egenvärdena är $\lambda = 0$ och $\lambda = 9$. Som egenvektorer finner vi att vi kan välja $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (egenvärde 0) och $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (egenvärde 9). $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ bildar en bas för planet och sålunda vet vi att allmänna lösningen ges av ($e^{0t} = 1$)

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{9t}, \; C_1, \, C_2 \text{ godtyckliga konstanter.}$$

Eftersom $e^{9t} \to \infty$ då $t \to \infty$, kräver begränsade lösningar för $t \geq 0$ att $C_2 = 0$. Eftersom $\lim_{t\to-\infty} y_2(t) = \lim_{t\to-\infty} C_1 - 2C_2e^{9t} = C_1$ blir kravet att $y_2(t) \to 1$ då $t \to -\infty$ att $C_1 = 1$. De efterfrågade lösningarna i det fallet är alltså $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{9t}$ där C_2 är godtycklig.